ECG 1 - mathématiques appliquées **Devoir en temps libre n°1** Pour le 16 septembre 2024

Corrigé *total sur 34 points*

Exercice 1 - calcul *7 points*

1. Simplifier les expressions suivantes : *0,5 point par question sauf le **d.** et **f.** - total : 5 points*

a. $A = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{5 \times 8}{4 \times 3} = \frac{5 \times 4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}$

b. $B = (\sqrt{13} - \sqrt{11})(\sqrt{11} + \sqrt{13}) = \sqrt{13}^2 - \sqrt{11}^2 = 13 - 11 = 2$

c. $C = \frac{7^{11} \times 27 \times 25}{49 \times 3^5 \times 35} = \frac{7^{11} \times 3^3 \times 5^2}{7^2 \times 3^5 \times 5 \times 7} = 7^{11-3} \times 3^{3-5} \times 5^{2-1} = 7^8 \times 3^{-2} \times 5 = \frac{7^8 \times 5}{3^2}$

d. $D = \frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{72}{162}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{8 \times 9}{2 \times 81}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$

e. $E = \frac{x^{n+1}}{x^{2n+2}} = x^{n+1-(2n+2)} = x^{n-2n+1-2} = x^{-n-1} = \frac{1}{x^{n+1}}$

f. $F = \frac{1}{5 - 3\sqrt{2}} + \frac{3 - 3\sqrt{2}}{7} = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{(5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2})} + \frac{3 - 3\sqrt{2}}{7} = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{5^2 - (3\sqrt{2})^2} + \frac{3 - 3\sqrt{2}}{7}$
$= \frac{5 + 3\sqrt{2}}{25 - 9 \times 2} + \frac{3 - 3\sqrt{2}}{7} = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{7} + \frac{3 - 3\sqrt{2}}{7} = \frac{5 + 3\sqrt{2} + 3 - 3\sqrt{2}}{7} = \frac{8}{7}$

g. $G = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{9} - \frac{1}{6} = \frac{24}{36} - \frac{21}{36} + \frac{20}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24 - 21 + 20 - 6}{36} = \frac{17}{36}$

h. $H = \frac{1}{a^{-n+1}} = a^{-(-n+1)} = a^{n-1}$

2. Écrire $A = 4\sqrt{72} - 8\sqrt{128} - 4\sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers. *1 point*

On remarque que chaque racine contient le produit d'un carré parfait avec 2 :
$A = 4\sqrt{36 \times 2} - 8\sqrt{64 \times 2} - 4\sqrt{4 \times 2}$ donc $A = 4 \times \sqrt{36} \times \sqrt{2} - 8 \times \sqrt{64} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$
$= 4 \times 6 \times \sqrt{2} - 8 \times 8 \times \sqrt{2} - 4 \times 2 \times \sqrt{2} = 24\sqrt{2} - 64\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -48\sqrt{2}$

3. Soit a, b deux réels, développer entièrement : $(a+b)^3$ *1 point*

En appliquant dans un premier temps l'identité remarquable à $(a+b)^2$:
$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$ puis en développant terme à terme,
$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + 2aba + 2abb + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Exercice 2 - Equations *1 point par équation sauf exception - total 10 points*

Pour les points **1.**, **2.**, **3.** et **4.**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
Au point **3.**, plusieurs équations sont simplifiables, attention cela change le discriminant et les valeurs de a, b et c, ce qu'il faut prendre en compte pour le calcul des racines (qui elles ne changent pas).

1. **a.** $(8x - 9)(-4x + 3) = 0$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété : « un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul ».
$(8x - 9)(-4x + 3) = 0 \iff 8x - 9 = 0$ ou $-4x + 3 = 0 \iff 8x = 9$ ou $4x = 3$
$\iff x = \frac{9}{8}$ ou $x = -\frac{3}{4}$ on en déduit que $\mathscr{S} = \left\{\frac{9}{8}; \frac{3}{4}\right\}$

b. $(4x - 9)(3x + 6) = 0$

De même $(4x - 9)(3x + 6) = 0 \iff 4x - 9 = 0$ ou $3x + 6 = 0 \iff 4x = 9$ ou $3x = -6$
$\iff x = \frac{9}{4}$ ou $x = -\frac{6}{3} = -2$ on en déduit : $\mathscr{S} = \left\{\frac{9}{4}; -2\right\}$

2. **a.** $x^2 - 64 = 0$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$: avec $a = x$ et $b = 8$ donc $x^2 - 64 = 0 \iff x^2 - 8^2 = 0 \iff (x-8)(x+8) = 0 \iff x - 8 = 0$ ou bien $x + 8 = 0 \iff x = 8$ ou bien $x = -8 \iff \mathscr{S} = \{-8; 8\}$

Option 2 (valable aussi) : on peut écrire d'emblée $x^2 = 64 \iff x = -\sqrt{64}$ ou $x = \sqrt{64}\ldots$

b. $x^2 - 36 = 0$ De même $x^2 - 36 = 0 \iff x = -\sqrt{36}$ ou $x = \sqrt{36}$ donc $\mathscr{S} = \{-6; 6\}$

3. **a.** $-4x^2 + 4x + 24 = 0 \iff x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-4) \times (24) = 400$ ou $\Delta' = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 \ldots x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{2a'} \ldots$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

soit $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{400}}{-8} = \dfrac{4 + 20}{8} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{400}}{-8} = \dfrac{4 - 20}{8} = -2$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathscr{S} = \{-2; 3\}$

b. $-4x^2 + 8x - 5 = 0$ *0,5 point*

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-4) \times (-5) = 64 - 80 = -16$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution que l'on peut écrire $\mathscr{S} = \emptyset$

c. $-3x^2 + 12x + 15 = 0 \iff x^2 - 4x - 5 = 0$

On remarque que -1 est racine évidente (c'est plus facile à voir sur l'équation simplifiée), de fait $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x - x_2)$, donc $-x_2 = -5$ et donc $x_2 = 5$, donc $\mathscr{S} = \{-1; 5\}$

On peut aussi utiliser le discriminant bien sûr.

d. $-2x^2 + 2x + 4 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0$

De même, on remarque que 2 est racine évidente, de fait $x^2 - x - 2 = (x-2)(x - x_2)$, donc $2x_2 = -2$ et donc $x_2 = -1$, donc $\mathscr{S} = \{-1; 2\}$ (on peut aussi trouver -1 comme « première » racine évidente).

4. **a.** $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{3}{x+3} \iff \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x+3} = 0 \iff \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{x+3}{x+3} - \dfrac{3}{x+3} \times \dfrac{x-1}{x-1} = 0$

$\iff \dfrac{x+3-3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = 0 \iff \dfrac{-2x+6}{(x-1)(x+3)} = 0 \iff -2x + 6 = 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq -3$

$\iff 2x = 6 \iff x = \dfrac{6}{2} = 3$ donc $\mathscr{S} = \{3\}$

b. $\dfrac{x+4}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} = -1 \iff \dfrac{x+4}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} + 1 = 0$ *1,5 points*

$$\iff \frac{x+4}{x+1} \times \frac{x-1}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x+1}{x+1} + \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 0$$

$$\iff \frac{x^2 + 4x - x - 4 - (x^2 + 2x + 1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0$$

$$\iff \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} = 0 \iff x^2 + x - 6 = 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

Nous sommes ramenés à une équation du second degré dont 2 est une racine évidente et de fait -3 est l'autre racine (on peut écrire $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$) et donc $\mathscr{S} = \{-3; 2\}$

Remarque : pour les deux équations précédentes, on peut préciser les ensembles de définition de ces équations au préalable ($\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ pour la première et $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$) mais on peut aussi raisonner par équivalence comme nous l'avons fait (une équation avec des valeurs interdites est équivalente à une autre avec les mêmes valeurs interdites).

Exercice 3 *2 points*

Pour chacune des suites données, calculer le terme demandé.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4n+1$
Calculer u_{12} Dans l'expression de u_n on remplace n par 12, on obtient : $u_{12} = 4 \times 12 + 1 = 49$

2. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+3}{2n+5}$
Calculer u_4 De même : $u_4 = \dfrac{1 \times 4 + 3}{2 \times 4 + 5} = \dfrac{7}{13}$

3. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n^2 - 5n - 7$
Calculer u_1 De même, $u_1 = -2 \times 1^2 - 5 \times 1 - 7 = -14$

4. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 5$
Calculer u_2 De même, $u_2 = 2^2 - 2 \times 2 + 5 = 5$

Exercice 4 - Inéquations *7 points*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (x est un nombre réel) :

   a. $x^2 - 5x - 4 \leqslant 2 \iff x^2 - 5x - 4 - 2 \leqslant 0 \iff x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$ *1,5 points*

   Nous sommes donc ramenés à l'étude du trinôme $x^2 - 5x - 6$ qui a pour racine évidente -1 et de fait pour autre racine 6. Comme le signe de a (qui vaut 1) est positif, le trinôme est négatif ou nul entre les racines, donc $\mathscr{S} = [-1; 6]$

   Option 2 : une fois les racines trouvées, on peut écrire $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x+3)$ puis faire un tableau de signes.

   b. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \iff \dfrac{2x-3}{x^2-4} - 1 < 0 \iff \dfrac{2x-3}{x^2-4} - \dfrac{x^2-4}{x^2-4} < 0 \iff \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0$
   $\iff \dfrac{-x^2+2x+1}{x^2-4} < 0 \iff \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$ *3 points*

   Nous sommes ramenés à l'étude de deux trinômes, puis au signe de leur quotient.
   On peut de nouveau utiliser les propriétés du signe des trinômes en fonction des racines, mais pour changer, nous allons utiliser les formes factorisées (dans les deux cas, il vaut mieux faire un tableau de signe ici pour conclure) :
   d'une part $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et d'autre part $x^2 - 2x - 1$ admet deux racines ($\Delta = 8$) qui sont $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2}$ i.e. $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}$
   (car $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$)
   soit $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ et donc $x^2 - 2x - 1 = \left[x - (1-\sqrt{2})\right]\left[x - (1+\sqrt{2})\right]$
   on peut désormais établir le tableau de signes, (attention à l'ordre : $-2 < 1-\sqrt{2} < 2 < 1+\sqrt{2}$)
   sachant que $x - a \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant a$ (pour les 4 premières lignes de signes) :

x	$-\infty$		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x - (1 - \sqrt{2})$		-		-	0	+		+		+	
$x - (1 + \sqrt{2})$		-		-		-		-	0	+	
$x + 2$		-	0	+		+		+		+	
$x - 2$		-		-		-	0	+		+	
$\dfrac{[x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]}{(x-2)(x+2)}$		+	||	-	0	+	||	-	0	+	

   Finalement, à la lecture du tableau, $\mathscr{S} =]-\infty; -2[\cup]1-\sqrt{2}; 2[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$

2. Démontrer les inégalités suivantes, valables pour tout nombre réel x :

   a. $\dfrac{1}{1+x^4} \leqslant 1$ *1 point*

Il s'agit simplement de remarquer que $0 < 1 \leqslant 1+x^4$ (car x^4 est toujours positif)
et comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\dfrac{1}{1+x^4} \leqslant \dfrac{1}{1} = 1$

b. $1 - \dfrac{1}{1+x^4} \leqslant x^4$ *1,5 points*

$1 - \dfrac{1}{1+x^4} = \dfrac{1+x^4}{1+x^4} - \dfrac{1}{1+x^4} = \dfrac{1+x^4-1}{1+x^4} = \dfrac{x^4}{1+x^4}$ donc $1 - \dfrac{1}{1+x^4} \leqslant x^4 \iff \dfrac{x^4}{1+x^4} \leqslant x^4$
or d'après **a.** $\dfrac{1}{1+x^4} \leqslant 1$ donc en multipliant l'inégalité par x^4 qui est positif ou nul, on trouve $\dfrac{x^4}{1+x^4} \leqslant x^4$ ce qui est équivalent à l'inégalité initiale.

Exercice 5 - étude de fonction *8 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

1. Calculer $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ et $f(3)$ *2 points*

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2\times(-2)+1 = \frac{-8}{3} - 2 + 4 + 1 = \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2\times(-1)+1 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = -\frac{5}{6} + 3 = \frac{13}{6}$$

$$f(0) = 1 \text{ et } f(1) = \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 2\times 1 + 1 = -\frac{7}{6}$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2\times 2 + 1 = -\frac{7}{3}$$

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 2\times 3 + 1 = 9 - \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2}$$

2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f *0,5 point*

On dérive terme à terme et on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - \dfrac{1}{2} \times 2x - 2 = x^2 - x - 2$

3. Etablir le tableau de variations de la fonction f *2 points*

Pour cela, on étudie le signe de f' qui est un trinôme du second degré
on remarque que -1 et 2 sont des racines évidentes donc $f'(x) = (x+1)(x-2)$

et donc $f'(x)$ est négatif sur $[-1; 2]$ et positif en dehors (du signe de a, positif ici, en dehors des racines). On peut donc établir le tableau de signes et de variations de f (on utilise des valeurs de f calculées précédemment) :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	

4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 0

Cette tangente T a pour équation *1 point*
$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$
c'est-à-dire $T : y = -2x + 1$ (car $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$)

Quelle est la particularité des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -1 et 2 ? *0,5 point*

La dérivée s'annule en ces points, il s'agit donc de tangentes horizontales, ce qui correspond à des extremums locaux comme on le voit sur le tableau de variations.

5. A l'aide des éléments précédents, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2; 3]$ *2 points*

On utilise tous les éléments dont on dispose : les images, les tangentes et on s'assure que le résultat est cohérent avec le tableau de variations.