Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ Calculatrice interdite
Bon devoir !

Exercice 1 - Vrai ou faux

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées. Vous répondrez sur votre copie (pour garder le sujet).

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$

b) $x^2=36 \Leftrightarrow x=6$

c) $\ln(a+b)=\ln a+\ln b$

d) $e^{x+y}=e^x+e^y$

e) $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est définie sur $[0;+\infty[$

f) $x=e^y \Leftrightarrow y=\ln x$

g) la fonction ln est monotone

h) la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est minorée

i) $|a+b|=|a|+|b|$

j) La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{x^4+2x^2+|x|}$ est impaire

Exercice 2 - Simplifier les expressions suivantes

a) $A=\sqrt{48}+\sqrt{147}-2\sqrt{75}$

b) $B=\frac{5-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$

c) $C=\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$

d) $D=\frac{9}{2}+\frac{8}{22}$

e) $E=\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}$

f) $F=\frac{2}{3}\div\frac{3}{10}$

g) $G=\frac{2^3\times 11^2\times 3^3\times 8}{2^7\times 33}$

h) $H=\frac{x^{3n}\times(x^{-n})^2}{x^{n+1}}$

Exercice 3

Soient a,b,c trois nombres réels. Recopier et compléter avec le signe $\leqslant$ ou $<$ ou $\geqslant$ ou $>$ qui convient :

a) si $a\leqslant b$ alors $a-c \ldots\ldots b-c$

b) si $a\leqslant b$ et $c\geqslant 0$ alors $ac\ldots\ldots bc$

c) si $a\leqslant b$ et $c\leqslant 0$ alors $ac\ldots\ldots bc$

d) si $0<a\leqslant b$ alors $\frac{1}{a}\ldots\ldots\frac{1}{b}\ldots\ldots 0$

e) si $a\leqslant b<0$ alors $0\ldots\ldots\frac{1}{a}\ldots\ldots\frac{1}{b}$

Exercice 4 - simplifications

1. Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $X=\frac{a^{3n}\times(a^{n+1})^3}{(a^n\times a^2)^2}$; écrire le nombre X sous la forme d'une seule puissance de a

2. Soit a et b deux réels non nuls et soit : $Y=\left(\frac{(a^2b^4)^2}{a^3}\right)^{-3}$; simplifier l'écriture de Y

3. Soit $n\in\mathbb{N}$, on note $a_n=(-3)^n+2\times 3^{n+1}-4\times 3^n$
En factorisant l'expression, montrer que a_n vaut 3^n lorsque n est impair, et vaut 3^{n+1} lorsque n est pair.

4. On pose : $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{2x-2}{\sqrt{x+1}}$; pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ?
Simplifier l'expression $f(x)$ au maximum.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x)=\left|-\frac{x}{2}+2\right|$ et la représenter graphiquement

Exercice 6 - équations et autres petites choses

1. Résoudre, les équations suivantes :

   a. $x^2 - x - 6 = 0$ **b.** $\sqrt{-2x+1} = 1$ **c.** $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 = 0$ **d.** $e^x - 1 - 6e^{-x} = 0$

2. **a.** Déterminer le signe du trinôme $2x^2 + x - 6$
   b. Justifier que $5 \leqslant \sqrt{29} \leqslant 6$
   c. Résoudre l'équation $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 1$
3. Résoudre l'équation $\ln(x^2) - \ln(x+1) = \ln(2) + 2\ln(3)$

Exercice 7 - inégalités et inéquations

1. Les inégalités suivantes sont-elles vérifiées ? (il faut justifier)
   a. pour tous réels a et b non nuls, $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
   b. pour tout x réel, $|x| \leqslant |x+1|$
2. Résoudre les inéquations :

   a. $|x^2 - 4| \leqslant 12$ **b.** $(2x-7)\ln(x+1) > 0$ **c.** $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right) \leqslant 0$

Exercice 8 - la parité enfin !

Etudier la parité des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \dfrac{x^3 + x^5}{1 + x^2}$
2. $f_2(x) = \ln(1 + |x|)$
3. $f_3(x) = e^x - e^{-x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Exercice 9 - étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

1. Calculer $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ et $f(4)$
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f
3. Etablir le tableau de variations de la fonction f
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 2
   Indication : on rappelle que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
5. A l'aide des éléments précédents, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-1; 4]$

Exercice 10

On cherche à démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

Indication : on rappelle que si $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction, alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = x - \ln(1+x)$
   a. Pour $x \geqslant 0$, calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f
   b. Etablir le tableau de variations de f
   c. Conclure quant à une partie de l'inégalité.
2. Pour $x \geqslant 0$, on pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$
   a. Etudier la fonction g
   b. Conclure quant à l'inégalité.