Corrigé

Total sur 55 points

Exercice 1 *0,5 point par bonne réponse - 5 points*

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées. Vous répondrez sur votre copie (pour garder le sujet).

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$

Faux, on peut s'en convaincre avec $a=1$ et $b=1$

b) $x^2=36 \Leftrightarrow x=6$

Faux, $x^2=36$ peut entrainer $x=-6$ donc l'équivalence n'est pas valide, seule l'implication $x=6 \Rightarrow x^2=36$ est vraie.

c) $\ln(a+b)=\ln a+\ln b$

Faux, on peut s'en convaincre avec $a=1$ et $b=1$

d) $e^{x+y}=e^x+e^y$

Faux, on peut s'en convaincre avec $x=0$ et $y=0$

e) $x\mapsto\sqrt{x-1}$ est définie sur $[0;+\infty[$

Faux, on ne peut pas parler de cette fonction pour $x=1$ (on parlerait de $\sqrt{-1}$). Elle est en fait définie sur $[-1;+\infty[$

f) $x=e^y \Leftrightarrow y=\ln x$

Vrai, par définition de la fonction exponentielle.

g) la fonction ln est monotone

Vrai, elle est croissante (et même strictement).

h) la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x^4}$ est minorée

Vrai, par exemple par 0, puisqu'il s'agit d'un quotient de termes positifs (qui reste donc toujours positif).

i) $|a+b|=|a|+|b|$

Faux, on peut s'en convaincre avec $a=-1$ et $b=2$

j) La fonction $x\mapsto\frac{x^3}{x^4+2x^2+|x|}$ est impaire

Vrai, la fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ (le dénominateur est toujours positif et nul uniquement si $x=0$) qui est symétrique par rapport à 0

de plus, en appelant f la fonction, $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^4+2(-x)^2+|-x|}=\frac{-x^3}{x^4+2x^2+|x|}=-f(x)$, donc f est impaire.

Exercice 2 - Simplifier les expressions suivantes *0,75 - 0,75 - 1 puis 0,5 point par question - total : 5 points*

a) $A = \sqrt{48} + \sqrt{147} - 2\sqrt{75} = \sqrt{3\times 16} + \sqrt{3\times 49} - 2\sqrt{3\times 25}$
$= \sqrt{3}\sqrt{16} + \sqrt{3}\sqrt{49} - 2\sqrt{3}\sqrt{25} = 4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = \sqrt{3}$

b) $B = \dfrac{5-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} = \dfrac{(5-\sqrt{2})^2}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \dfrac{5^2 - 10\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{5^2 - \sqrt{2}^2} = \dfrac{25+2-10\sqrt{2}}{25-2} = \dfrac{27-10\sqrt{2}}{23}$

c) $C = \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}^2 - 2\sqrt{3-2\sqrt{2}} \times \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}^2$
$= 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 6 - 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 6 - 2\sqrt{9-8}$
$= 6 - 2\sqrt{1} = 6 - 2 = 4$

d) $D = \dfrac{9}{2} + \dfrac{8}{22} = \dfrac{99}{22} + \dfrac{8}{22} = \dfrac{107}{22}$

e) $E = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{35}$

f) $F = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{3}{10} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{9}$

g) $G = \dfrac{2^3 \times 11^2 \times 3^3 \times 8}{2^7 \times 33} = \dfrac{2^3 \times 11^2 \times 3^3 \times 2^3}{2^7 \times 3 \times 11} = 2^{3+3-7} \times 3^{3-1} \times 11^{2-1} = 2^{-1} \times 3^2 \times 11 = \dfrac{9\times 11}{2} = \dfrac{99}{2}$

h) $H = \dfrac{x^{3n} \times (x^{-n})^2}{x^{n+1}} = \dfrac{x^{3n} \times x^{-2n}}{x^{n+1}} = x^{3n-2n-(n+1)} = x^{n-n-1} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

Exercice 3 *0,5 point par question - total : 2,5 points*

Soient a, b, c trois nombres réels. Recopier et compléter avec le signe $\leqslant$ ou $<$ ou $\geqslant$ ou $>$ qui convient :
Voir le cours.

a) si $a \leqslant b$ alors $a - c \leqslant b - c$

b) si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$ alors $ac \leqslant bc$

c) si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$ alors $ac \geqslant bc$

d) si $0 < a \leqslant b$ alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b} > 0$

e) si $a \leqslant b < 0$ alors $0 > \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$

Exercice 4 - simplifications *5 points*

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X = \dfrac{a^{3n} \times (a^{n+1})^3}{(a^n \times a^2)^2}$; écrire le nombre X sous la forme d'une seule puissance de a

$X = \dfrac{a^{3n} \times a^{3n+3}}{a^{2n} \times a^4} = a^{3n+3n+3-2n-4} = a^{4n-1}$ *0,75 point*

2. Soit a et b deux réels non nuls et soit : $Y = \left(\dfrac{(a^2b^4)^2}{a^3}\right)^{-3}$ Simplifier l'écriture de Y *0,75 point*

$Y = \dfrac{(a^2b^4)^{-6}}{a^{-9}} = \dfrac{a^{-12}b^{-24}}{a^{-9}} = a^{-12-(-9)}b^{-24} = a^{-3}b^{-24} = \dfrac{1}{a^3b^{24}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = (-3)^n + 2 \times 3^{n+1} - 4 \times 3^n$ *1,5 points*
En factorisant l'expression, montrer que a_n vaut 3^n lorsque n est impair, et vaut 3^{n+1} lorsque n est pair.

On peut d'emblée distinguer les cas n pair ou n impair, ou utiliser $(-3)^n = (-1)^n \times 3^n$
alors $a_n = (-1)^n \times 3^n + 2 \times 3 \times 3^n - 4 \times 3^n = 3^n((-1)^n + 6 - 4) = (2 + (-1)^n)3^n$
Puis on distingue les cas :
si n est pair, $(-1)^n = 1$ et donc $a_n = (2+1) \times 3^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$
et si n est impair, $(-1)^n = -1$ et donc $a_n = (2-1) \times 3^n = 1 \times 3^n = 3^n$

4. On pose : $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{2x-2}{\sqrt{x+1}}$; pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ? *2 points*

Simplifier l'expression $f(x)$ au maximum.

Deux contraintes limitent la définition de la fonction :
- la racine carrée qui impose $x+1\geqslant 0 \iff x\geqslant -1$
- le quotient qui impose $\sqrt{x+1}\neq 0 \iff x+1\neq 0 \iff x\neq -1$

donc le domaine de définition de f est $]-1,+\infty[$

pour simplier l'expression, il faut réduire au même dénominateur :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}-\frac{2x-2}{\sqrt{x+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}-\frac{2x-2}{\sqrt{x+1}}=-\frac{x+1-(2x-2)}{\sqrt{x+1}}$$
$$=-\frac{-x+3}{\sqrt{x+1}}$$

Exercice 5 *3 points*

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x)=\left|-\dfrac{x}{2}+2\right|$ et la représenter graphiquement

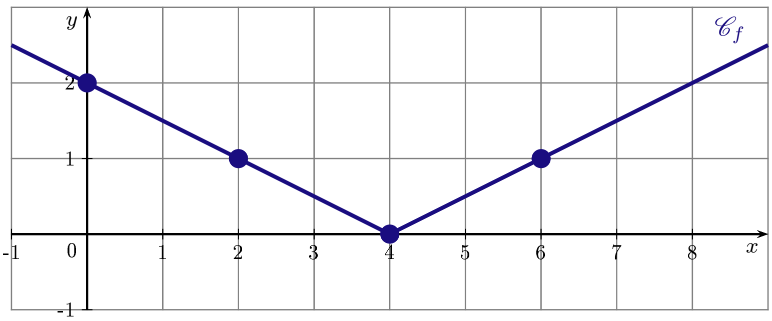
La valeur absolue n'entraine pas de contrainte de définition (on peut prendre la valeur absolue de tout nombre réel), donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour la représentation, il est plus sage de trouver une expression plus simple de f (i.e. sans valeur absolue).

On distingue donc les cas : si $-\dfrac{x}{2}+2\geqslant 0$, ce qui correspond à $2\geqslant\dfrac{x}{2}$, c'est-à-dire $4\geqslant x$, alors $f(x)=\left|-\dfrac{x}{2}+2\right|=-\dfrac{x}{2}+2$ et si $-\dfrac{x}{2}+2<0$, ce qui correspond à $2<\dfrac{x}{2}$, c'est-à-dire $4<x$, alors $f(x)=\left|-\dfrac{x}{2}+2\right|=-\left(-\dfrac{x}{2}+2\right)=\dfrac{x}{2}-2$

Sans surprise, f est la réunion de deux morceaux de fonctions affines, respectivement $x\mapsto\dfrac{x}{2}-2$ qui est croissante sur $]-\infty,4[$; et $x\mapsto-\dfrac{x}{2}+2$ qui est décroissante sur $[4,+\infty[$

Pour le tracé, comme il s'agit de deux morceaux de droite, deux points suffisent dans chaque domaine (par exemple $f(0)=2$ et $f(2)=1$ d'une part ; $f(4)=0$ et $f(6)=1$ d'autre part). On peut aussi utiliser un point et le coefficient directeur pour chaque portion de droite.



Exercice 6 - équations *12 points*

1. Résoudre, les équations suivantes :

a. $x^2-x-6=0$ *1 point*

On peut utiliser le discriminant ou remarquer que -2 et 3 sont des racines de x^2-x-6 : $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

b. $\sqrt{-2x+1}=1$ *1 point*

Si x est solution de $\sqrt{-2x+1}=1$ alors $\sqrt{-2x+1}^2=1^2$, soit $-2x+1=1$, donc $-2x=0$, i.e. $x=0$
réciproquement si $x=0$, alors $\sqrt{-2x+1}=1$

c. $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0$ *1 point*

On remarque que x est solution de $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0$ équivaut à $\ln(x)$ est solution de $X^2-X-6=0$ ce qui équivaut à (cf. **1.a.**) $X=-2$ ou $X=3$, c'est-à-dire $\ln(x)=-2$ ou $\ln(x)=3 \iff x=e^3$ ou $x=e^{-2}$

<u>Variante avec la factorisation</u> :

d'après **a.**, on sait que $X^2-X-6=(X+2)(X-3)$, donc $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=(\ln(x)-3)(\ln(x)+2)$
donc $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0 \iff (\ln(x)-3)(\ln(x)+2)=0 \iff \ln(x)-3=0$ ou $\ln(x)+2=0 \iff \ln(x)=3$ ou $\ln(x)=-2 \iff x=e^3$ ou $x=e^{-2}$

d. $e^x - 1 - 6e^{-x} = 0$ *1 point*

En multipliant par e^x (ou en divisant par $e^x > 0$ pour le sens retour), $e^x - 1 - 6e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow ((e^x))^2 - e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)(e^x + 2) = 0$ (d'après la question **a.**)
$\Leftrightarrow e^x = 3$ ou $e^x = -2 \Leftrightarrow x = \ln(3)$ (car $e^x = -2$ est impossible)

2. **a.** Déterminer le signe du trinôme $2x^2 + x - 6$ *1,5 points*

On peut utiliser le discriminant $\Delta = 25$ ou remarque que -2 est racine et donc $2x^2 + x - 6 = 2(x+2)(x-b)$
or $2(x+2)(x-b) = 2(x^2 + (2-b)x - 2b)$ donc $-4b = -6$ donc $b = \dfrac{3}{2}$
donc $2x^2 + x - 6 = 2(x+2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$
On peut faire un tableau de signe ou utiliser que $2x^2 + x - 6$ est positif ou nul $(a > 0)$ à l'extérieur des racines, donc sur $]-\infty, -2] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et négatif ou nul sur $\left[-2, \dfrac{3}{2}\right]$

b. Justifier que $5 \leqslant \sqrt{29} \leqslant 6$ *0,5 point*

On sait que $25 \leqslant 29 \leqslant 36$ et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $\sqrt{25} \leqslant \sqrt{29} \leqslant \sqrt{36}$ i.e. $5 \leqslant \sqrt{29} \leqslant 6$

c. Résoudre l'équation $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 1$ *3 points*

La question **a.** nous donne l'ensemble de définition de l'équation, que nous n'utiliserons pas car nous allons procéder par analyse/synthèse :
soit x tel que $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 1$ alors $\sqrt{2x^2 + x - 6}^{\,2} = (x+1)^2$, c'est-à-dire $2x^2 + x - 6 = x^2 + 2x + 1$
et donc $x^2 - x - 7 = 0$, nous sommes donc ramenés à l'étude d'un trinôme
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 29$ donc les solutions de l'équation $x^2 - x - 7 = 0$ sont
$x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{29}}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{29}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$
Comme nous n'avons pas procédé par équivalence, il faut vérifier nos solutions. On peut le faire par le calcul ou remarquer que si $x < -1$ alors $x + 1 < 0$ et donc x ne peut être solution de $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 1$
on en déduit que x_1 ne peut être solution, car $x_1 < -1$; en effet, d'après la question précédente $-\sqrt{29} \leqslant -5$ donc $1 - \sqrt{29} \leqslant -4$ et donc $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2} \leqslant -2$
par contre x_2 est solution car $x_2 > -1$ et dès lors que $x > -1$ on a l'équivalence $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 7 = 0$ en effet pour effectuer le sens « retour », il faut prendre la racine carrée, et on trouve $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x + 1$ (si $x \geqslant -1$)
d'où $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}\right\}$

3. Résoudre l'équation $\ln(x^2) - \ln(x+1) = \ln(2) + 2\ln(3)$ *3 points*

On peut préciser que l'équation est définie dès lors que les logarithmes sont bien définis, c'est-à-dire $x^2 > 0$ et $x + 1 > 0$ soit $x \neq 0$ et $x > -1$; on obtient alors
$\ln(x^2) - \ln(x+1) = \ln(2) + 2\ln(3) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) = \ln(2) + \ln(9)$
car le domaine de définition de $\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ est le même

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \ln(18) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = 18 \text{ (par propriété du logarithme)}$$

Finalement, comme $x \neq -1$, l'équation équivaut à $x^2 = 18(x+1)$ et nous sommes ramenés à l'étude du trinôme $x^2 - 18x - 18$ qui admet 2 racines car :
$\Delta = 18^2 - 4 \times 1 \times (-18) = (18+4) \times 18 = 22 \times 18 = (20+2)(20-2) = 396$
$x_1 = \dfrac{18 - \sqrt{396}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{18 + \sqrt{396}}{2}$ donc $x_1 = 9 - 3\sqrt{11}$ et $x_2 = 9 + 3\sqrt{11}$
car $\sqrt{396} = \sqrt{4 \times 99} = \sqrt{4 \times 9 \times 11} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{11} = 2 \times 3\sqrt{11}$
il faut alors vérifier que x_1 et x_2 sont bien dans le domaine de définition
c'est clairement le cas pour x_2 ; de plus $x_1 \neq 0$ et $x_1 > -1 \Leftrightarrow 9 - 3\sqrt{11} > -1 \Leftrightarrow 3\sqrt{11} < 10 \Leftrightarrow (3\sqrt{11})^2 < 10^2 \Leftrightarrow 9 \times 11 < 100 \Leftrightarrow 99 < 100$
comme $99 < 100$, on en déduit que $x_1 > -1$ et donc x_1 est bien solution.
N.B. : on garde l'équivalence en passant au carré, car on ne manipule que des nombres positifs ici.

Exercice 7 - inégalités et inéquations *6 points*

1. Les inégalités suivantes sont-elles vérifiées ? (il faut justifier) *1 point*

a. pour tous réels a et b non nuls, $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Non, par exemple avec $a = -1$ et $b = 1$ (alors $\dfrac{1}{a} = -1 < 1 = \dfrac{1}{b}$)

b. pour tout x réel, $|x| \leqslant |x+1|$

Non, par exemple avec $x = -1$ (alors $|x| = 1 \geqslant 0 = |x+1|$)

2. Résoudre les inéquations :

a. $|x^2 - 4| \leqslant 12$ *1,5 points*

On peut faire deux cas selon le signe de $x^2 - 4$, on peut aussi utiliser la propriété $|x| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$
alors $|x^2-4| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant x^2 - 4 \leqslant 12 \Leftrightarrow -8 \leqslant x^2 \leqslant 16 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 16$
$\Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant 4$

donc $\mathscr{S} = [-4; 4]$

b. $(2x-7)\ln(x+1) > 0$ *1,5 points*

On peut remarquer que l'inéquation n'est définie que lorsque $x + 1 > 0$ i.e. $x > -1$, ensuite c'est une affaire de tableau de signes :

au préalable on peut préciser $2x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{7}{2}$ et $2x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{2}$
et $\ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

x	-1		0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x - 7$		-		-	0	+	
$\ln(x+1)$	‖	-	0	+		+	
$(2x-7)\ln(x+1)$	‖	+	0	-	0	+	

A la lecture du tableau, on trouve donc $\mathscr{S} =]-1, 0[\cup \left]\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$

c. $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right) \leqslant 0$ *2 points*

On peut préciser que l'inéquation n'est définie que lorsque $\dfrac{x+1}{3x-5} > 0$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$x + 1$		-	0	+		+	
$3x - 5$		-		-	0	+	
$\dfrac{x+1}{3x-5}$		+	0	-	‖	+	

Par ailleurs, dès lors que l'équation est définie, alors
$\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{3x-5} \leqslant 1$ car l'exponentielle et le logarithme sont des fonctions croissantes
$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{3x-5} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{3x-5} - \dfrac{3x-5}{3x-5} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+6}{3x-5} \leqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$-2x + 6$		+		+		-	
$3x - 5$		-	0	+		+	
$\dfrac{-2x+6}{3x-5}$		-	‖	+	0	-	

mais comme nous l'avons vu plus haut l'inéquation n'est pas définie sur $\left[-1; \dfrac{5}{3}\right]$

donc finalement $\mathscr{S} =]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$

Exercice 8 - la parité enfin ! *4,5 points*

Etudier la parité des fonctions suivantes

a) $f_1(x) = \dfrac{x^3 + x^5}{1 + x^2}$ *1 point*

f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2$ ne s'annule pas (strictement positif)
$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et
$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(-x) = \dfrac{(-x)^3 + (-x)^5}{1 + x^2} = \dfrac{-x^3 - x^5}{1 + x^2} = -\dfrac{x^3 + x^5}{1 + x^2} = -f_1(x)$
donc f est impaire

b) $f_2(x) = \ln(1 + |x|)$ *1 point*

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$ et donc $|x| + 1 > 0$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique
et $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(-x) = \ln(1 + |-x|) = \ln(1 + |x|) = f_2(x)$ donc f_2 est paire

c) $f_3(x) = e^x - e^{-x}$ *1 point*

exp est définie sur $\mathbb{R}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ (qui est toujours symétrique)
et $\forall x \in \mathbb{R}, f_3(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)} = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f_3(x)$
donc f_3 est impaire

d) $f_4(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ *1,5 points*

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$ et donc $e^{2x} + 1 > 0$ donc f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ (symétrique) et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f_4(-x) &= \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{2x}(e^{-2x} - 1)}{e^{2x}(e^{-2x} + 1)} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\ &= \frac{-(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1} = -f_4(x)\end{aligned}$$

donc f_4 est impaire

Exercice 9 - étude de fonction *6,5 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

1. Calculer $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ et $f(4)$. *1,5 points*

$f(-1) = (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 = -1 - 5 \times 1 - 2 + 8 = 0$
$f(0) = 8$ et $f(1) = 1^3 - 5 \times 1^2 + 2 \times 1 + 8 = 1 - 5 + 2 + 8 = 6$
$f(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 2 \times 2 + 8 = 8 - 5 \times 4 + 4 + 8 = 20 - 20 = 0$
$f(3) = 3^3 - 5 \times 3^2 + 2 \times 3 + 8 = 27 - 5 \times 9 + 6 + 8 = 41 - 45 = -4$
$f(4) = 4^3 - 5 \times 4^2 + 2 \times 4 + 8 = 4 \times 16 - 5 \times 16 + 8 + 8 = -16 + 16 = 0$

2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f. *0,5 point*

On dérive terme à terme et on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2x + 2 = 3x^2 - 10x + 2$

3. Etablir le tableau de variations de la fonction f. *1,5 points*

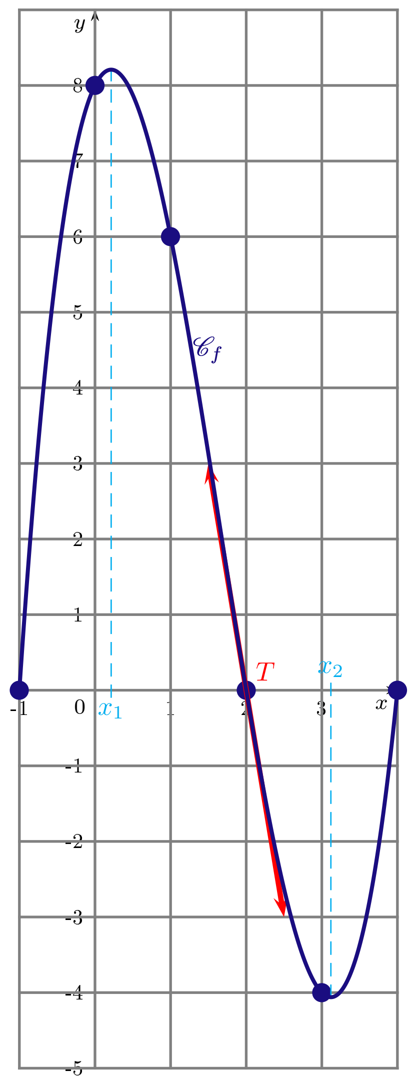
Pour cela, on étudie le signe de f' qui est un trinôme du second degré
son discriminant vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 100 - 24 = 76$

donc le trinôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-10) - \sqrt{76}}{2 \times 3}$ et $x_2 = \dfrac{-(-10) + \sqrt{76}}{2 \times 3}$

or $76 = 4 \times 19$ donc $\sqrt{76} = \sqrt{4}\sqrt{19} = 2\sqrt{19}$

donc $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{19}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{19}}{3}$ et donc $f'(x)$ est négatif sur $[x_1, x_2]$ et positif en dehors (du signe de a, positif ici, en dehors des racines). On peut donc établir le tableau de signes et de variations de f (on se contentera de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ dans le tableau) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	



4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 2. *1 point*

Indication : on rappelle que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Cette tangente T a pour équation $T : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$,
c'est-à-dire $T : y = -6(x - 2) + 0 = -6x + 12$ car $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = -6$

5. A l'aide des éléments précédents, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-1; 4]$. *2 points*

On utilise tous les éléments dont on dispose : les images, les tangentes et on s'assure que le résultat est cohérent avec le tableau de variations.
On ne dispose pas de valeur précise pour x_1 et x_2 et encore moins pour leurs images, mais on peut remarquer que $4 \leqslant \sqrt{19} \leqslant 5$ donc $\dfrac{4}{3} \leqslant \dfrac{\sqrt{19}}{3} \leqslant \dfrac{5}{3}$

donc $0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{1}{3}$ et $3 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{10}{3}$

Exercice 10 *5,5 points*

On cherche à démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

Indication : on rappelle que si $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction, alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

A défaut de pouvoir démontrer directement une inégalité par le calcul, il arrive que l'on passe par une ou des étude(s) de fonction.

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = x - \ln(1+x)$

a. Pour $x \geqslant 0$, calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f *1 point*

f est dérivable et on utilise la formule donnée par l'énoncé avec $u(x) = x+1$ et donc $u'(x) = 1$

donc $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$

b. Etablir le tableau de variations de f *1 point*

f' est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc f' est positive (quotient de termes positifs) et de fait f est croissante sur $[0;+\infty[$, de plus $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, ce que l'on peut aussi résumer dans un tableau :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	0 $\nearrow$

c. Conclure quant à une partie de l'inégalité. *1 point*

f est croissante sur $[0,+\infty[$
donc $\forall x \in [0,+\infty[, f(x) \geqslant f(0)$, i.e. $\forall x \in [0,+\infty[, f(x) \geqslant 0$
autrement dit $\forall x \in [0,+\infty[, x - \ln(1+x) \geqslant 0$ et donc $x \geqslant \ln(1+x)$ d'où la moitié de l'inégalité demandée.

2. Pour $x \geqslant 0$, on pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

a. Etudier la fonction g *1,5 points*

g est dérivable et avec la même dérivée pour $x \mapsto \ln(1+x)$, on trouve :
$\forall x \in [0;+\infty[, g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x = \dfrac{1 - x - 1 + x^2 + x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$
donc g' est positive (quotient de termes positifs) et de fait g est croissante sur $[0;+\infty[$

b. Conclure quant à l'inégalité. *1 point*

g est croissante et $g(0) = 0$

donc $\forall x \in [0;+\infty[, g(x) \geqslant 0$, i.e. $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$

et donc $\ln(1+x) \geqslant x + \dfrac{x^2}{2}$ d'où l'autre partie de l'inégalité demandée.

Finalement $\forall x \geqslant 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$ et $\ln(1+x) \leqslant x$ d'où le résultat.