

Devoir en temps libre n°2

*Devoir à faire en binôme obligatoirement, vous rendrez une copie pour deux.
Objectif qualité!*

Exercice 1 - Questions diverses et indépendantes

1. En français, puis avec des quantificateurs, donner la négation de l'assertion : « f est positive ».
2. Avec des quantificateurs, écrire l'assertion « f n'est pas impaire » puis donner sa négation en français (où f est définie sur \mathbb{R}).
3. Pour tout réel x , on définit $f(x) = |2x - 1| - 3|1 + x| + 2|1 + 2x|$
 - a. Suivant les valeurs de x , déterminer l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue.
 - b. En déduire les solutions de l'inéquation \mathcal{I} suivante,

$$\mathcal{I} : |2x - 1| - 3|1 + x| \leq x - 2|1 + 2x|$$

4. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x et de paramètre $m, m \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3x - m}{x - 1} = m$$

5. Démontrer que pour tout réel $x, [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = [2x]$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a) $f : x \mapsto -4$ | e) $j : x \mapsto e^{x^2}$ |
| b) $g : x \mapsto 4x^5$ | f) $k : x \mapsto \ln(\sqrt{3x + 6})$ |
| c) $h : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4x^8}$ | g) $l : x \mapsto (-13x + 4)^7$ |
| d) $i : x \mapsto \sqrt{2x - 10}$ | h) $m : x \mapsto x^{x^2}$ |

Exercice 3 - récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq n$

Exercice 4 - logique britannique

On s'intéresse à la proposition P « tous les anglais sont des artistes et des physiciens ».

1. On considère que P est vraie. En déduire, si possible, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
 - a) Isaac est anglais donc il est artiste.
 - b) Juan est un physicien donc il est anglais.
 - c) Paul n'est pas un physicien donc il n'est pas anglais.
 - d) Il existe des physiciens qui ne sont pas anglais.
2. Donner la négation de la proposition P

Exercice 5 - étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{(x + 1) \ln x}{x - 1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f que l'on notera \mathcal{D}_f et l'ensemble de dérivabilité de f
2. Déterminer le signe de f
3. Déterminer f' la dérivée de f sur \mathcal{D}_f
4. Etudier la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$, en déduire son signe.
5. En déduire les variations de f sur \mathcal{D}_f
6. Expliquer pourquoi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (on ne cherchera pas à faire une démonstration rigoureuse).
7. Représenter graphiquement f
On pourra utiliser la calculatrice pour calculer des valeurs approchées.
8. Avec Python :
 - a. écrire un programme qui définit la fonction f
 - b. écrire un programme qui calcule 100 images distinctes de la fonction f (abscisses au choix), puis qui représente f
9. A l'aide du graphique obtenu à la question 8.b., proposer une valeur pour $f(1)$ qui rendrait la fonction continue (au moins en apparence).