Objectifs d'apprentissage
A la fin de ce chapitre, je sais :
- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ☐
- manipuler les quantificateurs universel et existentiel ☐
- distinguer une proposition, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ☐
- formuler la négation d'une proposition ☐
- donner un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ☐
- reconnaitre et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde ☐
- mettre en place un raisonnement par récurrence ☐

1 Assertion

Définition : en mathématiques, on appelle une **assertion** ou une **proposition** une phrase dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Exemples :
- « $2 + 3$ » n'est pas une assertion.
- « la fonction carré est croissante » est une assertion fausse.
- « pour tout réel x, $e^x \geqslant 0$ » est une assertion vraie.

2 Opérations « ou », « et », « non »

Définitions : si P et Q sont deux assertions,
- l'assertion « P **et** Q » est vraie quand les deux sont vraies et fausse sinon ;
- l'assertion « P **ou** Q » est vraie dès que l'une au moins est vraie (les deux peuvent être vraies : on dit que le « ou » est inclusif), elle est donc fausse si les deux sont fausses ;
- l'assertion « **non** P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie (c'est la négation de la proposition P).

Remarque : pour déterminer si une opération est vraie ou fausse, on peut utiliser des tableaux appelés « tables de vérité ».

P	**non** P
V	F
F	V

P	Q	P **ou** Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	P **et** Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Le « ou » mathématique diffère donc du « ou » du langage courant en français qui peut être exclusif : « fromage ou dessert ».

3 Assertions équivalentes et propriétés

Définition : on dira que deux assertions P et Q sont **équivalentes** si et seulement si elles ont même table de vérité. On notera $P \equiv Q$

Remarque : pour que deux assertions soient équivalentes il faut qu'elles soient toutes les deux vraies en même temps (et donc toutes les deux fausses en même temps).

Exemple : non (non P) $\equiv P$

Propriétés - lois de Morgan : si P et Q sont deux assertions,
- non (P ou Q) $\equiv$ (non P) et (non Q)
- non (P et Q) $\equiv$ (non P) ou (non Q)

Exemple : « il y a tempête », c'est-à-dire « il pleut et il vente ». S'il n'y a pas tempête, cela veut dire « il ne pleut pas » ou « il ne vente pas ».

Démonstration : non (P ou Q) $\equiv$ (non P) et (non Q) :

P	Q	P **ou** Q	**non** (P **ou** Q)	**non** P	**non** Q	(**non** P) **et** (**non** Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Propriétés - distributivité : si P, Q et R sont trois assertions,
- P ou (Q et R) $\equiv$ (P ou Q) et (P ou R)
- P et (Q ou R) $\equiv$ (P et Q) ou (P et R)

4 L'implication

L'implication est l'outil principal des démonstrations en mathématiques.

Définition : si P et Q sont deux assertions, on définit l'assertion « P **implique** Q », que l'on notera $P \Rightarrow Q$, par :

$$P \Rightarrow Q \equiv Q \text{ ou (non } P)$$

Table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q \equiv Q$ **ou** (**non** P)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple : dans l'exercice des jetons, les trois assertions « le jeton rond est bleu », « le jeton rond est vert » et « le jeton carré n'est pas bleu » sont fausses alors que les trois implications proposées dans l'exercice sont vraies.

Remarques :
- lorsque P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. C'est la base des raisonnements mathématiques.
- lorsque $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition suffisante à Q, et que Q est une condition nécessaire à P
- $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse (autrement dit Q ne se déduit pas de P).

Condition nécessaire, condition suffisante sont des expressions utilisées en lieu et place de l'implication. En effet si $P \Rightarrow Q$ est vraie :
- P est une condition suffisante à Q (il suffit d'avoir P vraie et l'implication nous donne Q vraie) ;
- Q est une condition nécessaire à P : si « on n'a pas Q » alors « on n'a pas P » (il faut que Q soit vraie pour que P soit vraie, cf. table).

Propriété - transitivité : si P, Q et R sont trois assertions,

$$(P \text{ vraie et } (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R \text{ vraies})) \Rightarrow R \text{ vraie}$$

Propriété - raisonnement par contraposée : si P et Q sont deux assertions,

$$(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P) \equiv P \Rightarrow Q$$

Exemples :

1. « S'il pleut, alors je prends mon parapluie »$\equiv$ « Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas ».
2. voir la démonstration de « si n^2 est impair alors n est impair » (exercice).

5 Equivalence

Propriété : si P et Q sont deux assertions,

si à la fois $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies, alors P et Q sont équivalentes. On le notera généralement $P \Leftrightarrow Q$ (P équivaut à Q).

Remarques :

- la propriété nous dit que $P \equiv Q$ et $P \Leftrightarrow Q$ signifient la même chose.
- lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, le fait que $Q \Rightarrow P$ soit vraie est appelé la **réciproque**.
- la réciproque n'est pas toujours vraie, par exemple un triangle équilatéral est isocèle, mais la réciproque n'est pas vraie.
- dans le cas d'équivalence, on parle aussi de **condition nécessaire et suffisante** : P est une condition nécessaire et suffisante à Q (et réciproquement).
- autre vocable pour parler d'équivalence : « si et seulement si » :
  P est vraie (respectivement fausse) si et seulement si Q est vraie (respectivement fausse).
- la table de vérité nous indique que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie quand P et Q sont vraies ou P et Q sont fausses.

Propriété - transitivité : si P, Q et R sont trois assertions,

$$(P \Leftrightarrow Q \text{ et } Q \Leftrightarrow R) \Rightarrow P \Leftrightarrow R$$

Remarque : c'est ce qui nous permet les raisonnements par équivalence : $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Z$ puis on conclut généralement avec « or Z est vraie donc P est vraie ».

6 Quantificateurs

Les quantificateurs sont des symboles mathématiques, que l'on utilise donc uniquement dans le langage mathématique (on ne les utilisera pas comme des abréviations dans des phrases en français).

a) Notations

$\forall$: quel que soit, pour tout

$\exists$: il existe (au moins un)

$\exists!$: il existe un unique

Exemples :

- la phrase écrite en toutes lettres « pour tout réel x, la valeur absolue de x est positive ou nulle » peut donc s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 25$ signifie « il existe un nombre réel dont le carré vaut 25 »
- $\exists! x \in \mathbb{R}, e^x = 1$ signifie « il existe un unique nombre réel dont l'exponentielle vaut 1 »
- on remarque au passage que ces quantificateurs sont utilisés pour écrire des assertions, et généralement on ne précisera pas « est vraie ».

b) Combinaison de quantificateurs

Il est possible d'utiliser successivement plusieurs quantificateurs, à condition qu'ils concernent des variables différentes. L'ordre des variables a alors une importance.

Comparons

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x$
2. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leqslant x$

L'une est vraie et l'autre est fausse.

Dans le premier cas, le n est choisi après le x, il peut donc dépendre de l'élément x choisi. Par exemple pour un x donné, on peut poser $n = \lfloor x \rfloor + 1$

Dans le deuxième cas, le n est choisi avant le x, il doit donc être le même quelle que soit la valeur de x, ce qui est impossible. Par exemple $x = n - 1$ ne vérifie pas la propriété.

Exemple : écrire avec des quantificateurs « pour tout réel m strictement positif, il existe un réel x, tel que $e^x = m$ ».

$\forall m \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}, e^x = m$

c) Quantificateurs et logique

Nous avons vu plus haut qu'il est possible de définir des assertions qui dépendent d'une variable (par exemple x).

Si $P(x)$ est une assertion dépendant de $x \in E$, E étant un ensemble quelconque.

1. La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E$, non $P(x)$.
   Par exemple la négation de « tous les élèves de la classe portent des lunettes » est « il existe un élève de la classe qui ne porte pas de lunettes ».
2. La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E$, non $P(x)$.
   Par exemple la négation de « la nuit, il existe un chat qui n'est pas gris » est « la nuit, tous les chats sont gris ».

Exemple : si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, quelle est la négation de « f est positive sur $\mathbb{R}$ » ?

La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$

7 Différents types de raisonnements

Raisonnements	**Exemples**
Pour montrer qu'une proposition du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Autrement dit, on cherche un $x \in E$ pour lequel non $P(x)$ est vraie.	Pour tous réels a et b, $a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$ Cette proposition avec fausse, en effet, avec $a = -2$ et $b = 1$, on a bien mais $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$ donc $a^2 > b^2$
Pour montrer qu'une proposition du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie, il ne suffit plus de regarder des cas particuliers. On doit prendre un x fixé, quelconque de E, et on vérifie que pour ce x, $P(x)$ est vraie. Rédaction : « Soit $x \in E$, (sous-entendu fixé et quelconque), montrons que $P(x)$ est vraie. ».	Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ par propriété du logarithme : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ d'où le résultat.

Analyse et synthèse Pour montrer qu'une proposition du type « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie, on construit un x particulier (parfois à l'aide d'un raisonnement au brouillon) et on montre que ce x convient : c'est le raisonnement par **analyse et synthèse** Ce raisonnement est utile également pour des résolutions d'équations : on suppose alors qu'il existe une solution et on travaille jusqu'à trouver des candidats. La synthèse sert à vérifier si les candidats sont solutions	Avec la résolution d'équation : Résoudre l'équation $x = \sqrt{x} + 2$ analyse : soit x solution de l'équation, alors $x - 2 = \sqrt{x}$ donc $(x-2)^2 = \sqrt{x}^2$ i.e. $x^2 - 4x + 4 = x$ donc x est solution de $x^2 - 3x + 4 = 0$ or ce trinôme admet pour solution -1 et 4 donc $x \in \{-1, 4\}$ synthèse : -1 n'est pas solution mais 4 est solution. donc $\mathscr{S} = \{4\}$
Contraposée C'est utilisé quand il est plus facile de montrer non $Q \Rightarrow$ non P que $P \Rightarrow Q$	Montrons que $x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$ On va montrer que $x \geqslant 2 \Rightarrow x^3 \neq 2$ Soit $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ et $x^3 \geqslant 8$ donc $x \neq 2$ ce qui démontre notre résultat
Absurde Parfois, on raisonne en émettant une hypothèse, que l'on espère fausse, et qui doit nous conduire à une contradiction (par exemple $1 = 2$). Cette contradiction invalide l'hypothèse de départ, qui devient fausse. Souvent, l'hypothèse faite est le contraire du résultat souhaité.	Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$ ne converge pas. Pour cela, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell^2$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ donc $\ell = \ell^2$ donc $\ell - \ell^2 = 0$ i.e. $\ell(1-\ell) = 0$, i.e $\ell = 0$ ou $\ell = 1$ ce qui est absurde car $u_0 = 2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (facile à démontrer) donc notre hypothèse de départ est fausse donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas
Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$: on peut montrer successivement les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, ou être très rigoureux et n'enchaîner que des assertions équivalentes.	cf. exercice $\lfloor(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\rfloor = 4n + 1$
Disjonction de cas Parfois la nature de la propriété nous amène à distinguer des cas. Cela peut arriver par exemple lorsqu'un résultat diffère selon que n est pair ou impair, ou x positif ou négatif (par exemple avec la valeur absolue).	Que vaut $A_n = (-3)^n \times 2^n$? on peut écrire $(-3)^n = (-1)^n \times 3^n$ donc $A_n = (-1)^n \times 3^n \times 2^n = (-1)^n \times 6^n$ 1$^{\text{er}}$ cas : n est pair alors $(-1)^n = 1$ et donc $A_n = 6^n$ 2$^{\text{ème}}$ cas : n est impair alors $(-1)^n = -1$ et donc $A_n = -6^n$

Remarque importante : une résolution d'équation ou d'inéquation requiert un raisonnement par équivalence afin d'être sûr d'avoir toutes les solutions et non seulement une partie ou des candidats (les raisonnements par analyse/synthèse et par double implication donnent cette équivalence). En revanche, dans tous les autres cas, notamment lorsqu'il faut montrer une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$ est vraie, les implications suffisent : éviter alors d'écrire par réflexe le symbole $P \Leftrightarrow Q$ car les équivalences risquent d'être non justifiées, et potentiellement fausses.

8 Raisonnement par récurrence

Pour démontrer une propriété $\mathscr{P}(n)$ définie pour un entier $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on aura fréquemment recours au raisonnement par récurrence.
Généralement $n_0 = 0$, c'est-à-dire que l'on démontre une propriété valable pour tout entier naturel.

Principe du raisonnement par récurrence :

1. **Initialisation** : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.
2. **Hérédité** : on **suppose** que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé quelconque et on montre que la propriété est vraie au rang suivant $n+1$
   Autrement dit, montrer que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ pour $n \geqslant n_0$, un entier fixé quelconque.
3. On peut alors **conclure** que pour tout $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Remarque : on peut illustrer ce raisonnement par une suite de dominos, qui tombent tous à partir du premier tombé (chacun faisant tomber le suivant) ou par le caractère héréditaire en génétique : si une caractéristique se transmet au descendant, dès lors qu'une personne aura cette caractéristique, tous les descendants l'auront également.

Exemple et méthode pour la rédaction : montrons que pour tout entier naturel $n, 5^n - 2^n$ est un multiple de 3

Etape 0 - définition : pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $\mathscr{P}(n)$: « $\exists k \in \mathbb{N}, 5^n - 2^n = 3k$ »

Etape 1 - initialisation : pour $n = 0$
$\mathscr{P}(0)$ est vraie $\Leftrightarrow 5^0 - 2^0$ est un multiple de 3
or $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ donc
$\mathscr{P}(0)$ est vraie $\Leftrightarrow 0$ est un multiple de 3
ce qui est vrai car $0 = 3 \times 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Etape 2 - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie

On cherche à montrer qu'alors $5^{n+1} - 2^{n+1}$ est un multiple de 3 et pour cela on va se ramener à l'hypothèse.

$$\begin{aligned}5^{n+1} - 2^{n+1} &= 5 \times 5^n - 2^{n+1} = 5 \times (5^n - 2^n + 2^n) - 2^{n+1} \\ &= 5 \times (5^n - 2^n) + 5 \times 2^n - 2 \times 2^n = 5 \times (5^n - 2^n) + 3 \times 2^n\end{aligned}$$

or par hypothèse de récurrence, $\exists k \in \mathbb{N}, 5^n - 2^n = 3k$
donc $5^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \times 3k + 3 \times 2^n = 3 \times (5k + 2^n)$
donc $5^{n+1} - 2^{n+1}$ est un multiple de 3
donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

En résumé, nous avons montré que :
$\mathscr{P}(0)$ est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ est vraie $\Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie

Etape 3 - conclusion : par théorème de récurrence on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ est vraie.