Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- utiliser les notations $\sum$ et $\prod$ ☐
- à l'aide de leurs propriétés (respectives), transformer les sommes : linéarité, relation de Chasles ; ou les produits : produit de produits ou de quotients, relation de Chasles ☐
- reconnaitre et simplifier les sommes remarquables : $\sum k$, $\sum k^2$, sommes géométriques et sommes télescopiques. ☐
- expliciter et manipuler le symbole $n!$ (factorielle de n) ☐
- manipuler des sommes doubles sur des cas simples : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}$ ☐

Ce chapitre repose sur la volonté de simplifier l'écriture d'opérations comme : $1+2+3+\cdots+50$ ou $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ (cumul des termes d'une suite).

1 Sommes

1.1 Premiers pas

Définitions et propriétés	**Remarques et exemples**
<u>Définitions - notation</u> : si n est un entier positif et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels quelconques, on pose : $$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$ Et plus généralement si p est un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$: $$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$ Entre 0 et n, il y a $n+1$ entiers, on dira que $\sum_{k=0}^{n} a_k$ contient $n+1$ **termes**	<u>Remarques</u> : • l'indice de sommation est une lettre muette : $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i$ • $\sum_{k=p}^{n} a_k$ contient $n+1-p=n-p+1$ termes • $\sum_{k=p}^{p} a_k = a_p$ (il n'y a qu'un seul terme) ; • pour tout réel a, $\sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$ et $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$ <u>Avec la notation $\sum$</u>, on écrit : $1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $1+q+q^2+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ De $\sum$ <u>à l'expression développée</u> : $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1+4+9+16$ $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+i} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}$ $\sum_{j=1}^{n} \frac{10}{1+j^2} = \frac{10}{2}+\frac{10}{5}+\frac{10}{10}+\cdots+\frac{10}{1+n^2}$

1.2 Premières propriétés

Propriétés	**Exemples**
Linéarité : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=p}^{n}a_k+\sum_{k=p}^{n}b_k$ et pour λ réel $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=p}^{n}a_k$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(k+k^2)=\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}k^2$ en effet $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(k+k^2)=1+1^2+2+2^2+\cdots+15+15^2$ ce qui est la même chose que $1+2+\cdots+15+1^2+2^2+\cdots+15^2$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3k=3\sum_{k=1}^{n}k$ en effet $3\times1+\cdots+3\times n=3\times(1+\cdots+n)$
Relation de Chasles : avec $p\leqslant j<n$ $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}a_k=\sum_{k=p}^{j}a_k+\sum_{k=j+1}^{n}a_k$	La somme des entiers de 1 à 50 vaut la même chose que la somme des entiers de 1 à 27 plus la somme des entiers de 28 à 50
Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left\lvert\sum_{k=p}^{n}a_k\right\rvert\leqslant\sum_{k=p}^{n}\lvert a_k\rvert$	Exemple : $\lvert-5+2-11\rvert\leqslant\lvert-5\rvert+\lvert2\rvert+\lvert-11\rvert$ en effet $14\leqslant18$
Remarque : attention $\displaystyle\left(\sum_{k=p}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=p}^{n}b_k\right)\neq\sum_{k=p}^{n}(a_kb_k)$ en général. Pour s'en convaincre, on peut tester avec $p=0$, $n=1$ et $a_0=a_1=b_0=b_1=1$	

1.3 Sommes usuelles

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{1000}k=\frac{1000\times1001}{2}=500\times1001=500\,500$
• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=5\times11\times7=385$
• sommes géométriques de raison q avec $q\neq1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Plus généralement, avec $p\leqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}q^k=\frac{q^p-q^{n+1}}{1-q}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$ $\displaystyle\sum_{k=10}^{20}2^k=\frac{2^{10}-2^{21}}{1-2}=\frac{2^{10}-2^{21}}{-1}=2^{21}-2^{10}$
• sommes télescopiques : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\left[(k+1)^2-k^2\right]=100^2-1^2=10\,000-1=9\,999$

Pour la somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

Ce que l'on démontre avec la linéarité, un changement d'indice (cf. **1.4**) et la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}-\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}-(a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k)=a_{n+1}-a_0$$

1.4 Changement d'indice

Il existe plusieurs façons d'écrire une même somme, par exemple :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+k)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}$ qui peut aussi s'écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}$

Propriété - changement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}$ plus généralement pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n+p} a_{j-p}$	Exemple : avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$ à l'aide du changement d'indice $i = k - 1$ Remarque : dans la pratique on change la lettre dans la nouvelle somme pour marquer le changement d'indice.

2 Produits

Définitions et propriétés	**Remarques et exemples**
Définition - notation : avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels (ou complexes) quelconques, on pose : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$ et plus généralement avec $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$: $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n$	Un exemple bien connu : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2 = 2^n$ et plus généralement $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} 2 = 2^{n-p+1}$ $\displaystyle\prod_{k=2}^{5} a_k = a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$ $\displaystyle\prod_{i=2}^{5} b_{10-i} = b_8 \times b_7 \times b_6 \times b_5$
Définition - exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'entier **factorielle de** n (ou n **factorielle**) par : $\displaystyle n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ Par convention on pose $0! = 1$	Remarque : on peut aussi définir $n!$ de manière récurrente par $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Exemples : $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ $4! = 4 \times 3! = 24$ $5! = 5 \times 4! = 120$ $\displaystyle\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$
Propriétés : avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$, plus généralement $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \lambda = \lambda^{n-p+1}$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$ $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=0}^{n} b_k\right)$ si $\forall k \in [\![0;n]\!]\ b_k \neq 0$, alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n} b_k}$ Relation de Chasles : avec $0 \leqslant j < n$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = \left(\prod_{k=0}^{j} a_k\right) \times \left(\prod_{k=j+1}^{n} a_k\right)$	
Produit télescopique : si $a_0, \ldots, a_n$ sont non nuls, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{1}} = \sqrt{n+1}$

Fonctions exponentielle et logarithme : de la somme au produit ou du produit à la somme

Pour tous réels $a_p, \dots, a_n$,

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a \times e^b$ se généralise en $\exp\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \exp(a_k)$

Si $\forall k, a_k > 0$, alors $\forall a, b > 0, \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$ se généralise en $\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$

Démonstration et méthode pour la rédaction d'une récurrence avec une somme :

On va démontrer la deuxième propriété, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{0} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{0} a_k\right) \Leftrightarrow \ln(a_0) = \ln(a_0)$

ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie

on va faire le lien en utilisant la relation de Chasles : $\sum_{k=0}^{n+1} \ln(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) + \ln(a_{n+1})$

or par hypothèse de récurrence $\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$

donc $\sum_{k=0}^{n+1} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) + \ln(a_{n+1}) = \ln\left[\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}\right] = \ln\left(\prod_{k=0}^{n+1} a_k\right)$ d'où $P(n+1)$

3 Sommes doubles

Il est possible de définir une somme de somme, on parle alors de somme double. On peut le voir comme la somme des éléments d'un tableau et dès lors que les indices sont indépendants, on vérifie :

Propriété : $\displaystyle \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$

voir l'exemple ci-dessous

$i \diagdown j$	1	2	$\dots$	j_0	$\dots$	p	
1	1	1	$\dots$	1	$\dots$	1	$\sum_{j=1}^{p} a_{1j} = p \times 1$
2	2	2	$\dots$	2	$\dots$	2	
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	
i_0	i_0	i_0	$\dots$	i_0	$\dots$	i_0	$\sum_{j=1}^{p} a_{i_0 j} = p \times i_0$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	
n	n	n	$\dots$	n	$\dots$	n	$\sum_{j=1}^{p} a_{nj} = p \times n$
	$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} = \frac{n(n+1)}{2}$			$\sum_{i=1}^{n} a_{ij_0}$		$\sum_{i=1}^{n} a_{ip}$	$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\right) = p \times \frac{n(n+1)}{2}$