Quelques corrigés

Exercice 1 - Vraies ou fausses

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

8. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$ Fausse, la négation est vraie.

9. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$ Fausse, la négation est vraie avec $z = xy$

10. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$ Vraie, avec $x = \dfrac{z}{y}$

Exercice 7 - Nier des assertions avec quantificateurs (plus difficile)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geqslant A,\ f(x) > M$ $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leqslant M$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x \leq 0$ $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ et $x > 0$

4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2,\ \big(|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\big)$
$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in I^2,\ \big(|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon\big)$

Exercice 8 - Limites de validité d'une proposition

Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x \geqslant y \implies x \geqslant y^2$$

En tâtonnant, on se rend compte que la propriété s'interprète plus facilement en considérant différentes catégories de valeurs pour x, on va donc distinguer des cas :

soit x un réel

<u>1^{er} cas</u> : $x < 0$ alors dans ce cas l'assertion est vraie puisqu'elle n'est jamais mise en défaut
pour être plus précis, non(P) est vraie dans ce cas, car $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x < y$, donc non($P$) ou Q est vraie, i.e. $P \Rightarrow Q$ est vraie.

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $x \in [0, 1]$ alors $\forall y \in \mathbb{R}_+, x \geqslant y \Rightarrow 1 \geqslant y \Rightarrow y \geqslant y^2$ (en multipliant par y l'inégalité précédente, comme y est positif, cela ne change pas le sens) et donc a fortiori $x \geqslant y^2$ (car $x \geqslant y$),
donc l'assertion est toujours vraie dans ce cas

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> : $x > 1$, alors avec $y = x$, on a bien $x \geqslant y$
mais pourtant $y = x \Rightarrow y > 1 \Rightarrow y^2 > y$ (en multipliant par y), i.e. $y^2 > x$
donc l'implication n'est pas vérifiée dans ce cas (car il existe au moins une valeur de y pour laquelle elle ne l'est pas), donc l'assertion est fausse dans ce cas

Finalement $\mathscr{S} =]-\infty, 1]$

Exercice 11 - Divisibilité par 8

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.

Si n est impair alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

2. Démontrer la contraposée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n$ impair, alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$
donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et de fait $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k) = 4k(k+1)$
or le produit de deux nombres consécutifs est toujours divisible par 2 (car l'un des deux au moins est pair), donc $k(k+1)$ est divisible par 2 et de fait $n^2 - 1$ est divisible par 8

3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Oui car l'implication non $Q \Rightarrow$ non P est équivalent à l'implication $P \Rightarrow Q$, c'est le principe du raisonnement par contraposée.