Quelques corrigés

Exercice 3 - inégalités

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geqslant 2\sqrt{x} - 1$

Option 1 : on remarque que $x \geqslant 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geqslant 0$
ce qui est vrai dès lors que $\sqrt{x}$ est défini, i.e. pour tout $x \geqslant 0$

Option 2 : sinon on peut effectuer des manipulations « classiques »
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x \geqslant 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1)^2 \geqslant 4x$
Il est important de justifier la dernière équivalence :
d'une part $x + 1 \geqslant 2\sqrt{x} \Rightarrow (x+1)^2 \geqslant 4x$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$
d'autre part $(x+1)^2 \geqslant 4x \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} \geqslant \sqrt{4x}$ car $x \geqslant 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et de plus $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1$ car $x \geqslant 0$ et $\sqrt{4x} = \sqrt{4}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$
donc pour $x \geqslant 0, x \geqslant 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geqslant 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$
ce qui est vrai donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geqslant 2\sqrt{x} - 1$

2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| \leqslant x^2 - x + 1$

Option 1 : en remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geqslant 0$ (car le discriminant de $x^2 - x + 1$ est négatif et $a > 0$), on utilise alors que pour tout $\alpha \geqslant 0, |x| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$
soit $x \in \mathbb{R}$, alors $|x - 1| \leqslant x^2 - x + 1 \Leftrightarrow -(x^2 - x + 1) \leqslant x - 1 \leqslant x^2 - x + 1$
$\Leftrightarrow -x^2 + x - 1 \leqslant x - 1 \leqslant x^2 - x + 1 \Leftrightarrow -x^2 \leqslant 0 \leqslant x^2 - 2x + 2$
comme $-x^2 \leqslant 0$ est toujours vérifié $|x - 1| \leqslant x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - 2x + 2$
or le discriminant de $x^2 - 2x + 2$ est strictement négatif (il vaut -4) et $a > 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \geqslant 0$
donc l'inégalité étant équivalente à une inégalité qui est vérifiée pour tout x réel, elle est également vérifiée pour tout x réel.

Option 2 : on distingue 2 cas, $x \geqslant 1$ (alors $x - 1 \geqslant 0$ et $|x - 1| = x - 1$) et $x \leqslant 1$ (alors $x - 1 \leqslant 0$ et $|x - 1| = -(x - 1)$) puis dans chaque cas, on se ramène à une inégalité qui est toujours vraie.

Exercice 5 - quelle chance ! encore un raisonnement par ...

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'assertion $P(n) : 2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$
Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow$: $2^{1-1} \leqslant 1! \leqslant 1^1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 1 \leqslant 1$
ce qui est vrai, donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$ et il est plus facile de séparer l'inégalité pour la suite
d'une part $2^{n-1} \leqslant n! \Rightarrow 2 \times 2^{n-1} \leqslant 2 \times n!$ i.e. $2^n \leqslant 2n!$
or $n \geqslant 1$ donc $n + 1 \geqslant 2$ et donc $(n+1)n! \geqslant 2n!$ i.e. $(n+1)! \geqslant 2n!$
donc $2^n \leqslant (n+1)!$ d'où la première partie de l'inégalité
d'autre part, $n! \leqslant n^n \Rightarrow (n+1) \times n! \leqslant (n+1) \times n^n$ i.e. $(n+1)! \leqslant (n+1)n!$
or $n^n \leqslant (n+1)^n$ donc $(n+1)n^n \leqslant (n+1)(n+1)^n$ i.e. $(n+1)n^n \leqslant (n+1)^{n+1}$
et donc $(n+1)! \leqslant (n+1)^{n+1}$ d'où l'autre partie de l'inégalité
donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité.
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Exercice 8 - une équation avec des racine carrées, deux raisonnements possibles

Au brouillon, déterminer les réels x tels que $\sqrt{x+2} = x$. En déduire une rédaction :

- par analyse-synthèse,

  Analyse : soit x solution alors $\sqrt{x+2} = x$ et donc $(\sqrt{x+2})^2 = x^2$ soit $x+2 = x^2$
  donc x est solution de $x^2 - x - 2$ qui admet pour racines évidentes -1 et 2
  donc $\mathscr{S} \subset \{-1; 2\}$

  Synthèse : -1 n'est pas solution (-1 ne peut être le résultat d'une racine)
  par contre 2 est solution puisque $\sqrt{2+2} = 2$
  Finalement $\mathscr{S} = \{2\}$

- par équivalence.

  On peut commencer par remarquer que si x est négatif alors x ne peut être solution (car cela ne peut pas être le résultat d'une racine carrée)
  donc les solutions sont à rechercher parmi les réels positifs.
  Soit $x \geqslant 0$, alors $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow (\sqrt{x+2})^2 = x^2$
  L'équivalence est bien vérifiée puisque $(\sqrt{x+2})^2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x+2})^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x+2} = |x| \Rightarrow \sqrt{x+2} = x$ car $x \geqslant 0$
  puis en poursuivant l'équivalence, on trouve comme plus haut $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ car $x \geqslant 0$

Exercice 9 - deux raisonnements par ...

Montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.

  1$^{\text{er}}$ cas : n est pair
  alors $\exists p \in \mathbb{N}^*, n = 2p$ et donc $n = 4p^2$ donc 4 divise n

  2$^{\text{ème}}$ cas : si n est impair alors $\exists p \in \mathbb{N}^*, n = 2p+1$,
  donc $n^2 = 4p^2 + 4p + 1$ donc $n^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4(p^2 + p)$, donc 4 divise $n^2 - 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + x^2 - 12x = 0 \Rightarrow |x| < 5$

  Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x^3 + x^2 - 12x = 0$
  alors $x(x^2 + x - 12) = 0$ donc $x = 0$ ou $x^2 + x - 12 = 0$
  or $x^2 + x - 12$ admet pour racines -4 et 3
  finalement $x = 0$ ou $x = -4$ ou $x = 3$
  donc dans tous les cas $|x| < 5$

Exercice 10 - une équation fonctionnelle, un raisonnement par ...

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y.$$

Exercice plus difficile que l'on va résoudre par anlyse-synthèse.

Analyse : soit f une telle fonction, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y$
en particulier (pour $x = 0$ et $y = 0$), on trouve $f(0)^2 - f(0) = 0$ i.e $f(0)(f(0) - 1) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

1$^{\text{er}}$ cas : $f(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(0) - f(x \times 0) = x + 0 \Leftrightarrow x = 0$ ce qui est faux donc $f(0)$ ne peut être égal à 0

2$^{\text{ème}}$ cas : $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(0) - f(x \times 0) = x + 0$ i.e $f(x) \times 1 + 1 = x$
et donc dans ce cas $f(x) = x + 1$
il y a donc une seule fonction candidate : $x \mapsto x + 1$

Synthèse : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$
alors pour $x, y \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + x + y + 1$
donc $f(x)f(y) + f(xy) = xy + x + y + 1 - (xy + 1) = x + y$ donc f est bien solution.
donc $\mathscr{S} = \{x \mapsto x + 1\}$

Exercice 11 - quelques raisonnements par ...

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \times (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Dans un premier temps, on peut écrire $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \times (n+1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Initialisation : $P(1)$ est vrai $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$ ce qui est vrai car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie

par relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

or par hypothèse de récurrence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$
donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Exercice 12 - un raisonnement par ...

On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \geqslant n$

Il faut ici procéder par récurrence double (ce que nous n'avons pas vu), c'est-à-dire qu'il faut faire l'initialisation pour deux valeurs consécutives, puis dans l'hérédité, on utilise l'hypothèse de récurrence pour deux rangs consécutifs (n et $n+1$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n)$: $F_n \geqslant n$
Initialisation : $F_0 \geqslant 0$ et $F_1 \geqslant 1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies
alors par hypothèse $F_n \geqslant n$ et $F_{n+1} \geqslant n+1$
donc $F_n + F_{n+1} \geqslant n + n + 1$ i.e. $F_n + F_{n+1} \geqslant 2n+1$
1er cas : si $n \geqslant 1$ alors $2n + 1 \geqslant n + 2$ et donc $F_n + F_{n+1} \geqslant n+2$, c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vérifiée
2ème cas : si $n = 0$, alors $F_2 = 2$ donc $P(2)$ est vérifiée
Finalement dans tous les cas, $P(n+1)$ est vérifiée d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence (double), $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Exercice 13 - équation à paramètre, raisonnement par...

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation d'inconnue x, en discutant en fonction des valeurs du paramètre réel m :

a) $m^2x + 3 = m + 9x$

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $m^2x + 3 = m + 9x \Leftrightarrow m^2x - 9x = m - 3 \Leftrightarrow (m^2 - 9)x = m - 3$
1er cas : $m = -3$ alors $(m^2 - 9)x = 0$ et $m - 3 = -6$ donc l'équation n'est jamais vérifiée.

2ème cas : $m = 3$ alors $(m^2 - 9)x = 0$ et $m - 3 = 0$ donc $(m^2 - 9)x = m - 3$ (indépendant de la valeur de x) et donc l'équation est toujours vérifiée.

3$^{\text{ème}}$ cas : $m^2-9\neq 0$ alors $x=\dfrac{m-3}{m^2-9}=\dfrac{m-3}{(m-3)(m+3)}=\dfrac{1}{m+3}$

b) $mx^2-mx+2=0$

Dès lors que $m\neq 0$, il s'agit de trouver les racines d'un trinôme du second degré, on commence donc par chercher l'existence de racines : $\Delta=(-m)^2-4\times m\times 2=m^2-8m=m(m-8)$, il s''agit donc d'un polynôme (en m) du second degré dont les racines sont 0 et 8

1$^{\text{er}}$ cas : $m\in]0,8[$ alors $\Delta<0$ et donc l'équation n'admet aucune solution.

2$^{\text{ème}}$ cas : $m=0$ l'équation n'est plus une équation du second degré, elle devient $2=0$, ce qui n'est jamais vérifié

3$^{\text{ème}}$ cas : $m=8$ alors $\Delta=0$ et donc le trinôme admet une seule racine : $x_0=\dfrac{m}{2m^2}=\dfrac{1}{2m}$

4$^{\text{ème}}$ cas : $m\in]-\infty,0[\cup]8,+\infty[$ alors $\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines
$x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2-8m}}{2m}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{m^2-8m}}{2m}$ et $x_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{m^2-8m}}{2m}$