Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- interpréter les définitions récursives ou explicites de suites : ☐
- reconnaître les suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2 ☐
- exploiter plusieurs méthodes pour étudier la monotonie d'une suite. ☐
- mettre en œuvre une méthode pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique. ☐
- mettre en œuvre une méthode pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ☐
- (toujours) calculer les sommes de termes d'une suite arithmétique ou géométrique. ☐

1 Notions générales sur les suites

Intuitivement, une **suite numérique réelle** est une suite (ou une liste) de nombres, possiblement infinie. Par exemple :

- 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ...
- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ...
- 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ...
- 15 ; 12 ; 9 ; 6 ...
- 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ...
- 1 ; 11 ; 21 ; 1211 ; 111221 ...

Plus précisément,

<u>Définition</u> : on appelle **suite réelle** une fonction d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: à chaque entier naturel n de I, on associe un nombre réel noté u_n (plutôt que $u(n)$), appelé **terme général d'indice** n (ou de rang n). Une telle suite u est notée $(u_n)_{n\in I}$ ou plus simplement (u_n)	<u>Remarque</u> : le premier terme est généralement u_0, puis les termes suivants : u_1, $u_2 \ldots$ (si $I = \mathbb{N}$). On rencontrera régulièrement $I = \mathbb{N}^*$, le premier terme est alors u_1 Avec l'<u>exemple</u> des nombres pairs cela donne : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $\ldots$, $u_n = 2n$, mais on peut aussi bien choisir : $v_{12} = 0$, $v_{13} = 2, \ldots$, $v_n = 2(n-12)$ pour $n \geqslant 12$

Modes de génération d'une suite

Nous avons vu dans les exemples précédents plusieurs façons de créer une suite (la liste n'est pas exhaustive) :

Forme explicite : en définissant explicitement le terme d'indice n que l'on pourra souvent écrire $u_n = f(n)$, f étant une fonction (définie au moins sur $\mathbb{R}_+$)	<u>Exemples</u> : $u_n = 2^n \times n!$ ou $v_n = e^{3n-7}$
Forme récurrente : en définissant la suite de manière récurrente (ou récursive), c'est-à-dire qu'on calcule un terme à l'aide du précédent. On l'écrira souvent $u_{n+1} = f(u_n)$ où f sera définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$	• $u_{n+1} = u_n + 3$ ici f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x + 3$ • parfois on calcule un terme à l'aide des deux précédents (ou plus) : $\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$ (Fibonacci) <u>Remarque</u> : avec ce type de suites on ne peut pas, a priori, calculer d'emblée un terme quelconque, il faut d'abord calculer tous les précédents (en théorie).
En définissant la suite de manière **implicite**,	par exemple comme solution d'une équation : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\ln((u_n + 8)^3) = n$

Dans la suite (du cours), on prendra $I = \mathbb{N}$ par commodité, mais les définitions et propriétés restent valables avec la définition (plus large) des suites.
De même, comme ci-dessous, l'ensemble des notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.

2 Variations d'une suite, suites majorées, minorées et bornées.

2.1 Variations

Définitions (et propriété) : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. • on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c$ propriété : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ (propriété) • on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si : $\exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_0, u_n = c$ On dira également que la suite est **constante à partir d'un certain rang**.	Exemples : que dire de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \lvert u_n^2 - 2\rvert$, • si $u_0 = 2$? alors $u_1 = \lvert 2^2 - 2\rvert = 2, u_2 = 2\dots$ et on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2$ • si $u_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$? alors $u_1 = \lvert 2+\sqrt{3}-2\rvert = \sqrt{3}$, puis $u_2 = \lvert 3-2\rvert = 1$, puis $u_3 = \lvert 1-2\rvert = 1$ et on en déduit de même que $\forall n \geqslant 2, u_n = 1$

Définitions et propriétés :

- la suite (u_n) est **croissante** si $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \leqslant p \Rightarrow u_n \leqslant u_p$
  ce qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$
- la suite (u_n) est **décroissante** si $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \leqslant p \Rightarrow u_n \geqslant u_p$
  ce qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$
- la suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- lorsque toutes les inégalités sont strictes, on dit que la suite est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Remarque : pour la monotonie, on utilisera plutôt la comparaison entre u_n et u_{n+1}, mais pas uniquement, plusieurs méthodes sont possibles.

Calculer $u_{n+1} - u_n$	avec $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ on trouve $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ on en déduit donc que (u_n) est (strictement) croissante.
Si $\forall n, u_n > 0$, **comparer** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **et** 1	avec $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+2^k)$ on peut démontrer (par récurrence que $\forall n, u_n > 0$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^k)}{\prod_{k=1}^{n}(1+2^k)} = \dfrac{\left(\prod_{k=1}^{n}(1+2^k)\right)(1+2^{n+1})}{\prod_{k=1}^{n}(1+2^k)} = 1 + 2^{n+1} > 1$ or $\forall n, u_n > 0$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est (strictement) croissante.
Passer par l'**étude d'une fonction**	dans le cas d'une formule explicite, avec $u_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2}$ On pose $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ bien définie sur $\mathbb{R}_+$ (2 + somme de termes positifs au dénominateur donc non nul). et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = -\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2} < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, de fait (u_n) est décroissante.

Passer par l'**étude d'une fonction** dans le cas d'une formule récurrente, mais on compare alors $f(x)$ à x En effet, avec une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, si $f(x) \geqslant x$ alors $f(u_n) \geqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \geqslant u_n$ Il faut bien vérifier que u_n se situe dans un domaine où l'inégalité est valable.	avec la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ on peut commencer par établir (par récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$ c'est le cas pour u_0 (donc $P(0)$ est vraie) et si c'est le cas pour u_n ($P(n)$ est vraie) alors $2+1 \leqslant 2+u_n \leqslant 2+2$ donc (racine croissante) $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{2+u_n} \leqslant \sqrt{4}$ d'où $P(n+1)$ et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie. On pose alors $f(x) = \sqrt{x+2}$ définie sur $[-2;+\infty[$ (intervalle stable par f) alors pour $x \geqslant 1, f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leqslant x \Leftrightarrow x+2 \leqslant x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \geqslant 0$ ce qui est vrai dès lors que $x \geqslant 1$ or $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n$ donc $f(u_n)$ est bien défini et $f(u_n) \geqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc (u_n) est croissante.
Par récurrence	Efficace avec l'exemple ci-dessus : pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$ initialisation : $u_1 = \sqrt{3} \geqslant 1 = u_0$ hérédité : si $u_n \leqslant u_{n+1}$ alors $u_n + 2 \leqslant u_{n+1} + 2$ puis $\sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+2}$ (car $\sqrt{.}$ croissante) i.e. $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ soit $P(n+1)$ est vraie, donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ ((u_n) est croissante).

⚠ dans le cas d'une suite récursive, f croissante n'implique pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
Contre-exemple : avec $f(x) = x^2$ et donc $u_{n+1} = u_n^2$
si $u_0 = 2$ alors $u_1 = 4, u_2 = 16 \dots$ et on peut démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
si $u_0 = \frac{1}{2}$ alors $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{16} \dots$ et on peut démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.2 Suites majorées, minorées et bornées.

Définitions : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite
- **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
- **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n$
- **bornée** si elle est majorée et minorée.

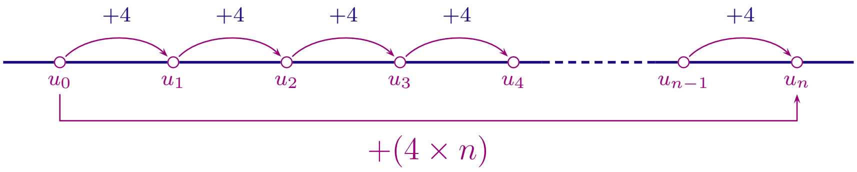
Exemples : les suites ci-desssous sont-elles majorées, minorées, bornées ?

Suite	majorée	minorée	bornée	Suite	majorée	minorée	bornée
$u_n = \frac{1}{n+1}$	☒	☒	☒	$u_0 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = u_n^2$	☒	☒	☒
$u_n = n$	☐	☒	☐	$u_0 = 2; u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$	☒	☒	☒
$u_n = (-1)^n$	☒	☒	☒	$u_0 = 9; u_{n+1} = \sqrt{u_n}$	☒	☒	☒
$u_n = (-2)^n$	☐	☐	☐	$u_0 = 1; u_{n+1} = e^{u_n}$	☐	☒	☐
$u_0 = 2; u_{n+1} = u_n^2$	☐	☒	☐	$u_0 = -1; u_{n+1} = e^{u_n}$	☐	☒	☐

3 Suites remarquables

3.1 Suite arithmétique

Exemple : la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 11$.



On remarque que $u_4 = u_0 + 4 \times 4$, $u_5 = u_0 + 5 \times 4 \ldots$ et que d'une manière générale : $u_n = u_0 + 4 \times n$

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique**, s'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

le nombre réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
une suite est arithmétique si l'écart entre un terme et le suivant est constant : $u_{n+1} - u_n = r$

Sur l'exemple précédent, la raison vaut 4

Propriétés : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors

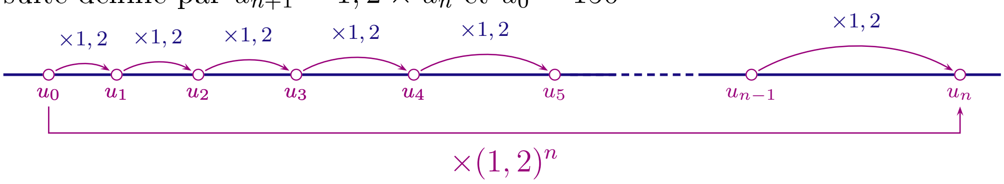
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r}$$

$\forall n \geqslant 1, u_n = u_1 + (n-1)r$ et plus généralement pour $p \in \mathbb{N}$ et $\forall n \geqslant p, u_n = u_p + (n-p)r$

Remarques : si la raison est positive (resp. négative), alors la suite est croissante (resp. décroissante).

3.2 Suite géométrique

Exemple : la suite définie par $u_{n+1} = 1,2 \times u_n$ et $u_0 = 150$



on remarque que $u_4 = u_0 \times (1,2)^4$, $u_5 = u_0 \times (1,2)^5$ et que d'une manière générale : $u_n = u_0 \times (1,2)^n$

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique**, s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

le nombre réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Sur l'exemple précédent, la raison vaut $1,2$. D'autres exemples : (u_n) et (v_n) sont-elles géométriques ?

(u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n + 1$

alors $u_1 = 9 = \dfrac{9}{2}u_0$ et $u_2 = 37 = \dfrac{37}{9}u_1$, or $\dfrac{9}{2} \neq \dfrac{37}{2}$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique

(v_n) définie par $v_n = \dfrac{2 \times 3^n}{5^{n+1}}$

alors $v_{n+1} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{5^{n+1+1}} = \dfrac{2 \times 3^n}{5^{n+1}}\dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{3}v_n$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

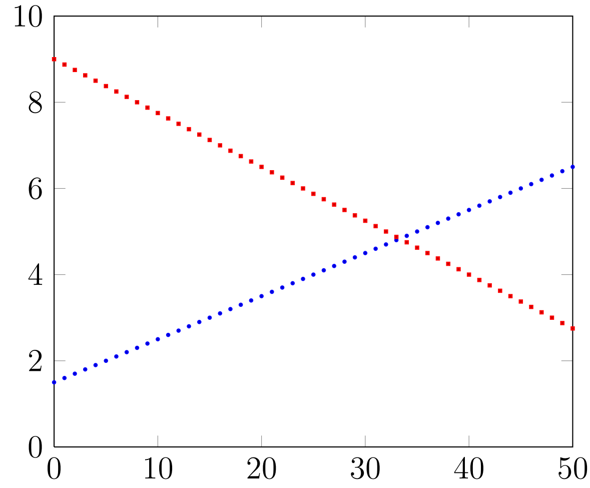
Propriétés : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$ et plus généralement $\forall n \geqslant p, u_n = u_p \times q^{n-p}$

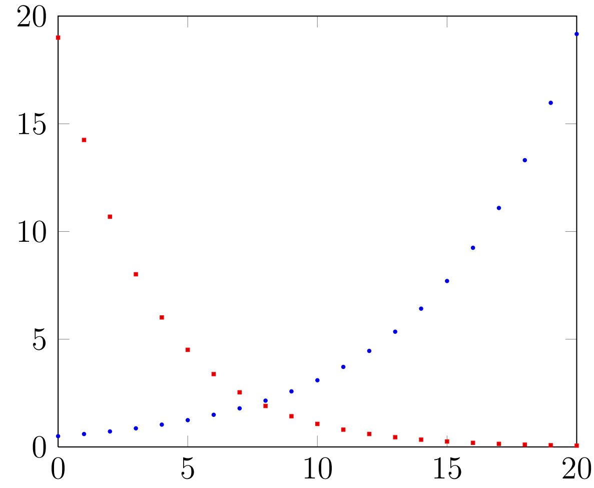
Remarques : si $u_0 > 0$ et $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
Si $q < 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

3.3 Représentation graphique



Les points des suites arithmétiques se situent tous sur une même droite, celle de la fonction affine correspondante.

Ci-dessus $u_n = 1,5 + \frac{1}{10}n$ et $v_n = 9 - \frac{1}{8}n$



Pour les suites géométriques, si la raison est supérieure à 1, les valeurs augmentent rapidement. Si elle est comprise entre 0 et 1, les valeurs tendent vers 0.

Ci-dessus $u_n = 0,5 \times 1,2^n$ et $v_n = 19 \times 0,75^n$

3.4 Sommes des termes de suites arithmétiques et de suites géométriques

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique (de raison r) $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_0 + kr)$ $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + \sum_{k=0}^{n} kr$ $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = nu_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$
si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (de raison $q \neq 1$), alors pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_0 q^k = v_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Plus généralement, pour tout entier $p \leqslant n$, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=p}^{n} v_0 q^k = v_0\frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$

La première formule peut être généralisée avec une somme commençant à p

3.5 Suites arithmético-géométriques

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique**, s'il existe un réel $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et un réel $b \neq 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque : comme nous allons le voir, nous pourrions les appeler des suites **quasi-géométriques**.

Pour trouver la forme explicite d'une telle suite, nous appliquerons la méthode suivante (qui vise à se ramener à une suite géométrique) :

Sur un exemple, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$

1) On cherche d'abord **un point fixe** de f (résoudre l'équation $\alpha = a\alpha + b$ d'inconnue α).	ici l'équation devient $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$, d'où $\frac{1}{2}\alpha = 2$ et donc $\alpha = 4$
2) **On introduit la suite** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $v_n = u_n - \alpha$	donc ici $v_n = u_n - 4$
3) **On vérifie que** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est géométrique**.	ici $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4$ par définition de (u_n) donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique.
4) **On calcule** v_n	ici $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n}v_0 = \frac{-3}{2^n}$
5) **On en déduit** u_n	ici $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 4$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-3}{2^n} + 4$

3.6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre** 2 lorsqu'il existe deux réels a et b $(b \neq 0)$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Remarque : on va (de nouveau) chercher à passer par des suites géométriques.
En effet, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (avec $v_0 \neq 0$ et $q \neq 0$), alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = q^n v_0$ et : (v_n) vérifie la relation de récurrence $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2}v_0 = aq^{n+1}v_0 + bq^n v_0$ $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n$ (car $v_0 \neq 0$) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^2 = aq + b$ (car $q \neq 0$)
donc (v_n) vérifie la relation de récurrence $\Leftrightarrow$ q est solution de $x^2 - ax + b = 0$
Nous sommes donc ramenés à une équation du second degré (équation caractéristique).

Propriété : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec a et b deux réels $(b \neq 0)$.
En notant Δ le discriminant de **l'équation caractéristique** $(E) : x^2 - ax - b = 0$

1. si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, et :
   $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
2. si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution r_0 et $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$
3. si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet pas de solution réelle et on ne peut expliciter u_n

Remarque : une suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 est donc totalement déterminée par les valeurs de ses deux premiers termes.

1) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ et $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ On cherche à expliciter la valeur de u_n	L'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$ on en déduit qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$ mais alors $u_0 = \lambda + \mu = 0$ et $u_1 = \lambda 2^1 + \mu 3^1 = 1$ donc $\lambda = -\mu$ et $-2\mu + 3\mu = 1$ d'où $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2^n + 3^n$
2) avec $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$ $v_0 = 0$ et $v_1 = -1$	L'équation caractéristique est $(x-3)^2 = 0$, d'où $v_n = \lambda 3^n + \mu n 3^n$ puis $\lambda = 0, (n = 0)$ et $3\lambda + 3\mu = -1$ soit $\mu = -\frac{1}{3}$ donc $v_n = -\frac{1}{3}n3^n$
3) avec $w_{n+2} = -w_n$ $w_0 = 1$ et $w_1 = 0$	L'équation caractéristique est $x^2 + 1 = 0$, qui n'admet pas de racines réelles.