

Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Variations et suites bornées	1, 2, 5	3, 4
Suites arithmético-géométriques	6, 7 c)	10
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	7 d) e)	8, 12
Etudes de suites	7 a) b), 11, D.L. n°3	9, 13, 14

Exercice 1

Indiquer si les suites ci-dessous (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont majorées et minorées. Préciser des minorants et majorants éventuels.

$$u_n = \frac{1}{2n} \qquad v_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad w_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

Exercice 2

Etudier la monotonie de la suite u (définie sur \mathbb{N} ou \mathbb{N}^*) dans les cas suivants.

1. $u_n = n - n^2$
2. $u_n = \frac{n-1}{n+2}$
3. $u_n = \frac{2^n}{n}$
4. $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$
5. $u_n = \prod_{k=0}^n (1 + 3^k)$
6. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Exercice 3 - variations

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{3}{k^2}\right)$

Exercice 4 - suite bornée

Montrer que la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+3}{3n+2}$ est bornée.

Exercice 5 - variations

Soit la suite u définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. Montrer que la suite u est strictement décroissante.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq x$ et retrouver la monotonie de u

Exercice 6 - suite arithmético-géométrique

Déterminer la formule explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 0$

Exercice 7 - pour s'échauffer

Donner les formules explicites des suites suivantes :

- a) $b_1 = 3$ et $2b_n = b_{n-1}$ ($n \geq 2$)
- b) $c_{k+1} - c_k = 3$ et $c_1 = 10$ ($k > 0$)
- c) $3u_j - 2u_{j-1} = 1$ et $u_0 = 0$ ($j \geq 1$)
- d) Pour $n \in \mathbb{N}, 2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0, f_0 = f_1 = 1$
- e) $\forall p \in \mathbb{N}, h_{p+2} = 2h_p$ et $h_0 = 1$ et $h_1 = 0$

Exercice 8 - des formules explicites moins explicites

Donner les formules explicites des suites suivantes :

$$\text{a) } u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} u_n \qquad \text{b) } u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$$

Exercice 9 - suite récurrente d'ordre 2

On définit la suite u par $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{4}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n$. En déduire sa limite.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Exercice 10 - suite auxiliaire, vers une suite arithmético-géométrique

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour $n \geq 0$

Reconnaître la suite v . En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Exercice 11 - encore une suite auxiliaire

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^3$

Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour $n \geq 0$

Montrer que v est bien définie, puis la reconnaître. Déterminer alors l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n

Exercice 12 - suite auxiliaire et ordre 2

On définit la suite u par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. Reconnaître la suite $(\ln(u_n))$ et expliciter $\ln(u_n)$ puis u_n

Exercice 13 - suite auxiliaire et arithmétique

On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n < 2$
2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est définie et arithmétique
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
4. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on pose $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$

Montrer que $\forall x \in [1; 2], f(x) \geq x$ et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 14 - suite auxiliaire et géométrique

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 1$
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et géométrique.
En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n