Devoir à faire en binôme obligatoirement, vous rendrez une copie pour deux. Objectif qualité !

Exercice 1 - échauffement

Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{i=-11}^{13}(4-7i)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{2k}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(e^k-e^{k+1}\right)$

Exercice 2 - suites à expliciter

Donner les formules explicites des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0=-5 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=4u_n+3 \end{cases}$

2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0=0 \text{ et } v_1=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}=\dfrac{1}{2}(v_{n+1}+v_n) \end{cases}$

Exercice 3

Pour $n\in\mathbb{N}$, avec $n\geqslant 2$, on définit $P_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

1. Calculer P_2, P_3, P_4 et P_5

2. Avec Python, écrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie P_n

3. Pour $n\geqslant 2$, émettre une conjecture sur la valeur de P_n, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 4 - suite et somme

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2u_n+n-1 \end{cases}$

1. a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant 1$

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant n$

2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2^n-n$

3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}-1}{2^n}=\dfrac{u_n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$

4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$

Exercice 5

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n} \end{cases}$

1. a) Avec Python, écrire un programme qui calcule les 100 premiers termes de la suite u

b) Calculer u_1, puis émettre une conjecture sur le sens de variations de la suite u et le démontrer par récurrence.

2. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, on définit la fonction f par $f(x)=\sqrt{1+x}$

a) Avec Python, définir la fonction f puis la représenter sur l'intervalle $[0,4]$

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 2$

c) Résoudre l'équation $f(x)-x\leqslant 0$

d) On admet que $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$

A l'aide des deux questions précédentes, retrouver le sens de variations de la suite u