Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ Calculatrice interdite
Bon devoir !

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ln(|x|) \geqslant 0$

b) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

c) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3n}{4} u_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n b_k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} e^i$

f) $\displaystyle\sum_{k=5}^{23} 6 = 108$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_0$

h) la fonction $x \mapsto \ln(x^3)$ est impaire

i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \sqrt{\lfloor x \rfloor}$

j) $\displaystyle\binom{2023}{46} = \binom{2023}{1977}$

Exercice 2 - suites à expliciter

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - **a.** Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - **b.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2, u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
   Donner une expression explicite de u_n

Exercice 3 - formule de la somme des carrés d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$, à l'aide d'un changement d'indice.
2. Développer $(k+1)^3$. Exprimer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$
3. En égalant les expressions obtenues en **1** et **2**, déduire la formule
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. Redémontrer la formule précédente par récurrence.
5. Avec Python, définir une fonction qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels défnie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$

1. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$
   - **a.** Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f
   - **b.** Etudier les variations de f
   - **c.** En déduire que, pour tout $x \geqslant 1, f(x) \geqslant 1$
   - **d.** Etudier le signe de $f(x) - x$
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Avec Python,
   - a) écrire un programme qui définit la fonction f
   - b) écrire un programme qui représente la fonction f et la droite $y = x$ sur l'intervalle $[1;10]$
   - c) écrire un programme qui calcule et représente les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   - d) on admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, déterminer le rang du premier terme de la suite tel que $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2+1}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f et justifier que f est également dérivable sur $\mathscr{D}_f$
2. Etudier la parité de la fonction f
3. Justifer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,
   $f'(x) = \dfrac{-2xg(x)}{(x^2+1)^2(1-x^2)}$ avec $g(x) = x^2 + 1 + (1-x^2)\ln(1-x^2)$
4. a. Déterminer le signe de $g'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$
   b. Dresser alors le tableau de variation de g sur $\mathscr{D}_f$
   c. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$
5. Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$

Exercice 6

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\mathrm{ch}(x) = e^x + e^{-x}$ et $\mathrm{sh}(x) = e^x - e^{-x}$
ainsi que la fonction f définie sur par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{sh}(x) = 0$
2. Etudier la parité des fonctions ch et sh. Interpréter graphiquement.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire son signe.
4. Etudier les variations de la fonction ch
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$
6. Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh
7. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f
8. Etudier la parité de la fonction f
9. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$
10. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$. Etudier les variations de h, puis en déduire le signe de h
11. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis établir le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}_f$

Exercice 7

On définit les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$

et $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n + v_n = 2$
2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = v_n - \dfrac{4}{5}$
   a. Utiliser la question **1.** pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   En déduire x_n en fonction de n
   b. Déterminer alors v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = \dfrac{1}{5}\left(6 - \dfrac{1}{6^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} u_k$

Exercice 8 - numéros de téléphone

On s'intéresse aux numéros de téléphone à 10 chiffres commençant par 06

1. Combien en existe-t-il au total ?
2. Combien ne comportent que des chiffres différents (après le 06) ?
3. Combien contiennent exactement 3 fois le chiffre 6 (après le 06) ?
4. Combien contiennent 8 chiffres rangés dans l'ordre (après le 06) ?
5. Combien ne contiennent que des chiffres pairs (après le 06) ?
6. Combien ne contiennent que des chiffres identiques (après le 06) ?