

## Quelques corrigés

**Exercice 7** - pour s'échauffer

Donner les formules explicites des suites suivantes :

d) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0$ ,  $f_0 = f_1 = 1$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est  $2x^2 + x - 1 = 0$   
 Les racines de l'équation sont  $-1$  (racine évidente) et  $\frac{1}{2}$  (en posant  $2(x+1)(x-x_2) = 2x^2 + x - 1$  on trouve  $x_2 = \frac{1}{2}$ )

donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda(-1)^n + \mu \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lambda(-1)^n + \mu \frac{1}{2^n}$

en particulier,  $f_0 = 1$  et  $f_1 = 1$  donc  $\lambda(-1)^0 + \mu \frac{1}{2^0} = 1$  et  $\lambda(-1)^1 + \mu \frac{1}{2^1} = 1$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + \frac{\mu}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \frac{3}{2}\mu = 2 \end{cases} \quad L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \mu = 2 \times \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \mu = \frac{4}{3} \end{cases}$$

finalement  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} \left( -(-1)^n + \frac{4}{2^n} \right) = \frac{1}{3} \left( (-1)^{n+1} + \frac{1}{2^{n-2}} \right)$

**Exercice 8** - des formules explicites moins explicites

Donner les formules explicites des suites suivantes :

a)  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} u_n$

Option A : on devine la formule explicite et on la démontre par récurrence

pour trouver la formule, on peut étudier les premiers termes  $u_1 = \frac{2 \times 0 + 2}{0 + 2} \times u_0 = \frac{2}{2} \times 1 = 1$

de même  $u_2 = \frac{2 \times 1 + 2}{1 + 2} \times u_1 = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$

$u_3 = \frac{2 \times 2 + 2}{2 + 2} \times u_2 = \frac{6}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

et  $u_4 = \frac{2 \times 3 + 2}{3 + 2} \times u_3 = \frac{8}{5} \times 2 = \frac{16}{5}$

on remarque une régularité au numérateur qui vaut  $2^n$  et en écrivant  $u_3 = 2 = \frac{2^3}{4}$ , on remarque également la régularité au dénominateur qui vaut  $n+1$ , d'où la proposition suivante

pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la proposition  $P(n) : u_n = \frac{2^n}{n+1}$

Initialisation :  $P(0)$  est vraie  $\Leftrightarrow u_0 = \frac{2^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$  ce qui est vrai donc  $P(0)$  est vraie

Hérédité : pour  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $P(n)$  vraie

par définition de la suite  $u_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} u_n$  or par hypothèse de récurrence  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$

donc  $u_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{2(n+1) \times 2^n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2^{n+1}}{n+2}$  ce qui signifie que  $P(n+1)$  est vraie

donc par théorème de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$  est vraie i.e.  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$

Option B : produit télescopique

on peut remarquer dans un premier temps que la définition de la suite entraîne  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

pour bien le démontrer on fait une récurrence (qui est presque immédiate) :  $u_0 > 0$  (initialisation) et si  $u_n > 0$  alors  $n \geq 0 \Rightarrow \frac{2n+2}{n+2} > 0$  et donc  $u_{n+1} > 0$  (hérédité).

alors la relation récursive s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2k+2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} \text{ et donc pour } n \geq 1, \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2}$$

or d'une part  $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_n}{u_0} = u_n$  par propriété sur les produits télescopiques et car  $u_0 = 1$

$$\text{et d'autre part } \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2} = \prod_{k=0}^{n-1} 2 \frac{k+1}{k+2} = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2}$$

et soit on écrit, avec  $a_k = k+1$  et donc  $a_{k+1} = k+1$ ,  $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{n+1}$  par télescopage

$$\text{soit avec le changement d'indice } j = k+1, \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \prod_{j=1}^n \frac{j}{j+1} = \frac{\prod_{j=1}^n j}{\prod_{j=1}^n (j+1)}$$

$$\text{or } \prod_{j=1}^n (j+1) = \prod_{i=2}^{n+1} i \text{ par changement d'indice } (i = j+1) \text{ donc } \prod_{j=1}^n (j+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i \text{ car } \prod_{i=1}^{n+1} i = 1 \times \prod_{i=2}^{n+1} i$$

$$\text{de plus } \prod_{j=1}^n j = n! \text{ et } \prod_{i=1}^{n+1} i = (n+1)! = (n+1)n!$$

$$\text{donc } \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+2} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1} \text{ et donc } \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2} = 2^n \times \frac{1}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$$

$$\text{finalement } \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = u_n \text{ et ce produit est égal à } \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{2^n}{n+1}$$

d'où  $\forall n \geq 1, u_n = \frac{2^n}{n+1}$  et cette formule est en fait aussi valable pour  $n = 0$

$$\text{b) } u_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$$

Comme pour la précédente, on va évoquer deux options.

Option A : on devine la formule explicite et on la démontre par récurrence

$$\text{pour trouver la formule, on peut étudier les premiers termes } u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{1}{2^1}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{de même } u_3 = \sqrt{u_2^2 + \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} \left( = \sqrt{\frac{2^3 - 1}{2^2}} \right)$$

$$\text{et } u_4 = \sqrt{u_3^2 + \frac{1}{2^3}} = \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{15}{8}} \left( = \sqrt{\frac{2^4 - 1}{2^3}} \right)$$

on remarque une régularité d'où la proposition suivante

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on définit la proposition } P(n) : u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$$

Initialisation :  $P(0)$  est vraie  $\Leftrightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2^1 - 1}{2^{1-1}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$  ce qui est vrai donc  $P(0)$  est vraie

Hérédité : pour  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $P(n)$  vraie

$$\text{par définition de la suite } u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$$

or par hypothèse de récurrence  $u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$  donc  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}} = \sqrt{\frac{2^{n+1} - 2}{2^n} + \frac{1}{2^n}}$   
donc  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}}$  ce qui signifie que  $P(n+1)$  est vraie  
donc par théorème de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$  est vraie i.e.  $u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$

Option B : somme télescopique

pour cela, il faut d'abord élever au carré l'égalité qui définit la suite :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \Rightarrow u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$$

et donc  $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1}{2^n}$  ce qui se prête à générer une somme télescopique :

pour  $n \in \mathbb{N}^*$  (et même  $n \geq 2$  en fait), on va calculer  $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$

$$\text{d'après l'égalité précédente } \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

or d'une part  $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_1^2$  par télescopage et  $u_1 = 1$  donc  $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - 1$

$$\text{d'autre part } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

donc finalement  $u_n^2 - 1 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ , soit  $u_n^2 = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$  et enfin  $u_n = \sqrt{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$   
et la formule est également valable pour  $n = 1$  puisque  $u_1 = 1$

### Exercice 9 - suite récurrente d'ordre 2

On définit la suite  $u$  par  $u_0 = 0, u_1 = \frac{4}{3}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ . En déduire sa limite.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et son équation caractéristique est  $3x^2 - 2x - 1 = 0$   
cette équation admet pour racine évidente 1 et de fait la deuxième est déduite de  $3(x-1)(x-x_2) = 3x^2 - 2x - 1$   
d'où  $3x_2 = -1$  et donc  $x_2 = -\frac{1}{3}$

$$\text{donc } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda 1^n + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{en particulier, } u_0 = 0 \text{ et } u_1 = \frac{4}{3} \text{ donc } \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 0 \text{ et } \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = 1$$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \frac{\mu}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \frac{4}{3}\mu = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad L_1 - L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

$$\text{finalement } \forall n \in \mathbb{N}, f_n = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

pour la limite nous verrons plus tard que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$  quand  $|q| < 1$ , donc ici  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$$\text{car } \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{de plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

2. Montrer que l'ensemble  $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est borné. Déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure.

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1 + \left| \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right|$  d'après l'inégalité triangulaire

or  $\left| \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right| = \frac{|(-1)^n|}{|3^n|} = \frac{1}{3^n}$  donc  $\left| \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right| \leq 1$  car  $3^n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq 1$   
donc  $|u_n| \leq 2$  et donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est borné et de fait l'ensemble  $E$  aussi.

Nous n'avons pas vu la notion de bornes supérieure et inférieure, il s'agit en fait de trouver les meilleurs majorant et minorant

pour cela on peut remarquer que  $u_n = 1 - \frac{1}{3^n}$  si  $n$  est pair et  $u_n = 1 + \frac{1}{3^n}$  si  $n$  est impair et on peut montrer que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante  
de fait  $u_0 = 0$  est un minorant de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et donc un minimum et donc la borne inférieure, et de même  $u_1 = \frac{4}{3}$  en est la borne supérieure.

### Exercice 10 - suite auxiliaire, vers une suite arithmético-géométrique

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier  $n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ . Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire  $v$  définie par  $v_n = \frac{u_n}{3^n}$  pour  $n \geq 0$ .

Reconnaître la suite  $v$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Pour trouver quel type de suite remarquable est  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on cherche un lien entre  $v_{n+1}$  et  $v_n$

pour  $n \in \mathbb{N}$ , par définition  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}}$  donc  $v_{n+1} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}}$  par définition de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

donc  $v_{n+1} = \frac{2u_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$

donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique

on cherche dans un premier temps un point fixe :  $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 1$

on introduit alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $w_n = v_n - 1$

soit  $n \in \mathbb{N}$ , par définition  $w_{n+1} = v_{n+1} - 1$  donc par définition de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$w_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$

donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ , de plus  $w_0 = v_0 - 1$  et  $v_0 = \frac{u_0}{3^0} = 0$  donc  $w_0 = -1$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times (-1) = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

or  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = w_n + 1$  donc  $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{3^n} \Rightarrow u_n = 3^n v_n$  donc  $u_n = 3^n \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 3^n \left[1 - \frac{2^n}{3^n}\right] = 3^n - 3^n \times \frac{2^n}{3^n} = 3^n - 2^n$

## Exercice 12 - suite auxiliaire et ordre 2

On définit la suite  $u$  par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$

Il faut procéder par récurrence double ici (que nous n'avons pas vue) : il faut modifier l'initialisation qui contient alors deux rangs, puis de même pour l'hérédité, on fait l'hypothèse sur deux rangs consécutifs. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $P(n)$  : «  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$  »

Initialisation :  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$  donc  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $P(n)$  et  $P(n+1)$  sont vraies

alors par hypothèse,  $u_n > 0$  et  $u_{n+1} > 0$  donc  $u_{n+2}$  est bien défini, de plus  $u_n u_{n+1} > 0$  donc  $\sqrt{u_n u_{n+1}} > \sqrt{0}$  car la fonction racine carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , i.e.  $u_{n+2} > 0$  donc  $P(n+2)$  est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n)$  est vraie, i.e.  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$

2. Reconnaître la suite  $(\ln(u_n))$  et expliciter  $\ln(u_n)$  puis  $u_n$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors par définition de  $u$ ,  $\ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_n \times u_{n+1}}) = \ln\left[(u_n \times u_{n+1})^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} \ln(u_n \times u_{n+1})$

et donc  $\ln(u_{n+2}) = \frac{1}{2}(\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n))$  par propriétés sur le logarithme

en posant  $v_n = \ln(u_n)$ , on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :  $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$

on étudie l'équation caractéristique :  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$  donc le discriminant vaut

$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$  donc  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  admet deux racines :

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$$

donc  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu 1^n = \lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu$

or  $v_0 = \ln(u_0) = \ln(1) = 0$  et  $v_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$  donc  $\lambda + \mu = 0$  et  $\lambda \left(-\frac{1}{2}\right) + \mu = \ln(2)$

en combinant les deux équations (différence), on trouve  $\frac{3}{2}\lambda = -\ln(2)$ , soit  $\lambda = -\frac{2}{3}\ln(2)$

et donc  $\mu = -\lambda = \frac{2}{3}\ln(2)$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{2}{3}\ln(2) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

or  $v_n = \ln(u_n)$ , donc  $u_n = e^{v_n} = \exp\left[\frac{2}{3}\ln(2) \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$  que l'on peut écrire  $u_n = 2^{\frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n]}$

### Exercice 13 - suite auxiliaire et arithmétique

On considère la suite définie par  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n < 2$ .

On procède par récurrence en définissant pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'assertion  $P(n)$  : «  $u_n$  est bien défini et  $1 \leq u_n < 2$  »

Initialisation :  $u_1$  est bien défini et  $u_1 = 1$  donc  $1 \leq u_1 < 2$  donc  $P(1)$  est vraie

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on suppose que  $P(n)$  est vraie

d'une part comme  $u_n < 2$ , alors  $u_n - 3 < -1$  donc  $u_n - 3 \neq 0$  et donc  $u_{n+1}$  est bien défini

on peut écrire  $\frac{u_n - 4}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3 - 1}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = 1 - \frac{1}{u_n - 3}$

or par hypothèse de récurrence  $1 \leq u_n < 2$  donc  $-2 \leq u_n - 3 < -1$  donc  $-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n - 3} > -1$  car

la fonction inverse est décroissante sur  $] -\infty, 0[$  et donc  $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{u_n - 3} < 1$  donc  $0 \leq -\frac{1}{u_n - 3} < 1$

donc  $1 \leq 1 - \frac{1}{u_n - 3} < 2$  soit  $1 \leq u_{n+1} < 2$ , i.e.  $P(n+1)$  est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$  est vraie, i.e.  $1 \leq u_n < 2$

2. Montrer que la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$  est définie et arithmétique

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bien définie car d'après la question 2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$  et donc  $u_n - 2 \neq 0$

de plus, par définition,  $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2}$  par définition de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

donc  $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{u_n - 4}{u_n - 3} - 2} = \frac{1}{\frac{u_n - 4 - 2(u_n - 3)}{u_n - 3}} = \frac{1}{\frac{u_n - 4 - 2u_n + 6}{u_n - 3}} = \frac{1}{\frac{-u_n + 2}{u_n - 3}} = \frac{u_n - 3}{-u_n + 2} = \frac{u_n - 2 - 1}{-u_n + 2} = \frac{u_n - 2}{-u_n + 2} + \frac{-1}{-u_n + 2}$

donc  $v_{n+1} = -1 + \frac{1}{u_n - 2} = v_n - 1$

donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est arithmétique de raison  $-1$

3. En déduire l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est arithmétique de raison  $-1$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 + (n - 1) \times (-1)$

or  $v_1 = \frac{1}{u_1 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = -1 - (n - 1) = -n$

or  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ , de fait (comme  $v_n \neq 0$ )  $u_n - 2 = -\frac{1}{n}$  et donc  $u_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n - 1}{n}$

### Exercice 14 - suite auxiliaire et géométrie

On considère la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$

1. Montrer que la suite est bien définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

$u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1}$  est bien défini et  $u_{n+1} > 0$ , donc par récurrence immédiate,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ .

2. Montrer que  $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$ . En déduire que pour tout  $n, u_n \neq 1$ .

$$u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{3 + 2u_n}{u_n + 4} = 1 \Leftrightarrow 3 + 2u_n = u_n + 4 \text{ (car } u_n + 4 \neq 0) \Leftrightarrow 2u_n - u_n = 4 - 3 \Leftrightarrow u_n = 1$$

De fait comme  $u_0 \neq 1$ , on en déduit par récurrence immédiate que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$

3. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ . Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et géométrique.

En déduire l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $u_n > 0$  donc  $u_n + 3 \neq 0$  et donc  $v_n$  est bien défini.

De plus, par définition  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3}$  et d'après la définition de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3 + 2u_n}{u_n + 4} - 1}{\frac{3 + 2u_n}{u_n + 4} + 3} = \frac{\frac{3 + 2u_n - u_n - 4}{u_n + 4}}{\frac{3 + 2u_n + 3u_n + 12}{u_n + 4}} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5} v_n$$

donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{5}$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n v_0$$

$$\text{or } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{1}{5} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$$

Reste à revenir à  $u_n$  : de  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ , on déduit  $v_n(u_n + 3) = u_n - 1$

$$\text{donc } 3v_n + 1 = u_n - u_n v_n = u_n(1 - v_n)$$

$$\text{donc } u_n = \frac{3v_n + 1}{1 - v_n} \quad (\text{possible car } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1)$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3 \frac{1}{5^{n+1}} + 1}{1 - \frac{1}{5^{n+1}}} \text{ que l'on peut aussi écrire } u_n = \frac{3 + 5^{n+1}}{5^{n+1} - 1}$$