Ce chapitre aborde principalement deux problèmes de dénombrement (dénombrer signifie « faire le compte des unités composant un ensemble ») :

- le nombre de façons d'ordonner un ensemble à n éléments (on parlera de permutation), par exemple si 3 élèves passent une colle consécutivement, combien existe-t-il d'ordres de passage ?
- le nombre de parties (combinaisons) à p éléments d'un ensemble à n éléments, par exemple si on veut constituer un groupe de colle de 3 élèves au sein d'une classe de 48 élèves, quel est le nombre de possibilités (ou combinaisons, avec $p = 3$ et $n = 48$ ici) ?

Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- utiliser le vocabulaire : permutation, combinaison, cardinal, coefficient binomial ☐
- exprimer un coefficient binomial (dont les cas particuliers) ☐
- reconnaitre et dénombrer un nombre de combinaisons ou de permutations ☐
- exploiter la formule du triangle de Pascal pour le calcul de coefficients binomiaux ou pour simplifier des expressions ☐

1 Cardinal, permutation et combinaison, définitions

a) Cardinal et permutation

Définitions : soit E un ensemble fini, on appelle **cardinal** de l'ensemble E, le nombre d'éléments de E, noté $\text{card}\, E$:

- si E est non vide, on peut numéroter ses éléments de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$), donc $\text{card}\, E = n$
- si E est vide ($E = \emptyset$), alors $\text{card}\, E = 0$

On appelle **permutation** de E « une façon d'ordonner tous les éléments de E ».

Remarque : on admet que ce n est unique (il ne dépend pas de l'ordre dans lequel on numérote).

Exemple (cardinal) : si $E = \{\text{élèves en maths appli.}\}$ alors $\text{card}\, E = 48$

Exemple (permutations) : Pierrette, Paulette et Jacquotte passent successivement une colle d'anglais. Différents ordres de passage, i.e. permutations, sont possibles :

Pierrette, Paulette puis Jacquotte ou Paulette, Jacquotte puis Pierrette ou Paulette, Pierrette puis Jacquotte... Pi-Pa-J, J-Pi-Pa, J-Pa-Pi
soit 6 permutations ou « ordres possibles ».

b) Combinaison

Définition : soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$

On appelle **combinaison de** E **à** p **éléments**, toute partie de E de cardinal p

Le nombre de combinaisons de E à p éléments est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ».

Exemples :

$\binom{3}{1} = 3$ $\binom{3}{2} = 3$ $\binom{5}{0} = 1$ $\binom{0}{0} = 1$ $\binom{5}{2} = 10$

Pour expliciter ce dernier résultat, on peut s'intéresser à l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$ dont les sous-parties à 2 éléments sont :

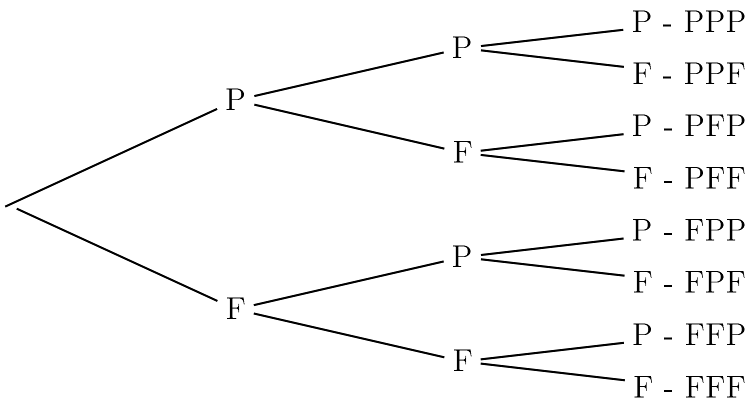
a, b	b, c	c, d	d, e
a, c	b, d	c, e	
a, d	b, e		
a, e			

On trouve de même $\binom{5}{3} = 10$ avec les combinaisons à 3 éléments ci-dessous.

a, b, c	a, c, d	b, c, d	
a, b, d	a, c, e	b, c, e	c, d, e
a, b, e	a, d, e	b, d, e	

Remarque : on peut interpréter $\binom{n}{p}$ comme le nombre de chemins pour arriver à p succès (ou échecs) dans un schéma de Bernoulli (comportant n expériences).
Voir l'exemple ci-contre avec trois lancers d'une pièce (pile ou face).

$\binom{3}{0} = 1 = \binom{3}{3}$ $\qquad$ $\binom{3}{1} = 3 = \binom{3}{2}$



2 Nombre de permutations

Propriété : le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$ ($n \in \mathbb{N}$)	Avec l'exemple plus haut, nous avons vu qu'il y a $3! = 6$ façons d'ordonner 3 éléments. De même, dans une course à trois chevaux, vous avez une chance sur 6 d'avoir le tiercé dans l'ordre.

On peut voir la propriété de la façon suivante (dans un ensemble à n éléments) :

- on a n choix pour l'élément à placer en premier,
- puis pour chacun de ces n choix, il y a $n-1$ choix pour l'élément à placer en deuxième,
- ... puis 2 choix pour l'élément à placer en avant-dernier,
- puis 1 choix pour l'élément à placer en dernier.

Finalement, le nombre d'options est $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$

Et par récurrence ! Voilà une bonne façon de démontrer la propriété.
L'initialisation à 1 (ou 0) est évidente. Si maintenant la propriété est vérifiée pour un rang n quelconque, ordonner un ensemble à $n+1$ éléments revient à $n+1$ possibilités pour le premier élément, puis à ordonner n éléments ensuite. Donc $n!$ possibilités pour chacune des $n+1$ possibilités pour le premier choix : $(n+1) \times n! = (n+1)!$

3 Propriétés des combinaisons

Propriétés : soient n et p deux entiers naturels • si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$ • $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$ • $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$ • si $0 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ Définition : $\binom{n}{p}$ est appelé **coefficient binomial**	Exemples et interprétations : • on ne peut constituer une partie à 15 éléments dans un ensemble à 10 éléments • choisir un élément parmi n est la même chose que d'en choisir $n-1$ (i.e. en exclure 1) : il y a n choix. • il n'y a qu'une seule façon de ne prendre aucun élément, c'est l'ensemble vide. De même pour constituer une partie à n éléments, une seule possibilité : prendre tous les élements. • cf. plus haut $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$, pour chaque partie à deux éléments, il existe une unique partie complémentaire à 3 éléments. Donc choisir $n-p$ parmi n revient à choisir les p éléments que l'on exclut.

« Démonstration » (ensembliste) pour la dernière :
Choisir une combinaison à p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ éléments dans l'ensemble complémentaire.
Autrement dit, pour chaque combinaison à p éléments de E, correspond une et une seule combinaison à $n-p$ éléments de E (et toutes ces combinaisons à $n-p$ éléments de E sont distinctes deux à deux).

Propriété - triangle de Pascal : pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$: $$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$	Cette formule nous permet de calculer les coefficients binomiaux de manière itérative, par exemple, $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$

« Démonstration » (ensembliste) :
Un ensemble à $n+1$ éléments peut se voir comme la réunion d'un élément de l'ensemble (peu importe lequel) et d'un ensemble à n éléments.
Les combinaisons à $p+1$ éléments de l'ensemble à $n+1$ éléments peuvent être classées en deux catégories :

- celles qui contiennent l'élément isolé : il y en a $\binom{n}{p}$
- et celles qui ne le contiennent pas il y en a $\binom{n}{p+1}$

} d'où $\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}}$

Propriété : pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$: $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$ *Démonstration en exercice.*	Exemples : $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$ $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

⚠ **Permutations et combinaisons sont deux questions différentes.** En particulier, **l'ordre** n'est pas pris en compte pour les combinaisons. Par exemple dans l'ensemble à 5 éléments, (a, b, c) est la même combinaison que (c, a, b).

4 Triangle de Pascal

La formule de Pascal nous donne un moyen (un algorithme) pour calculer des coefficients binomiaux à partir des « précédents ».
Par exemple : $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$

Triangle de Pascal

$n \diagdown p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

on remarque les 1 sur la première colonne et la diagonale, ainsi que la symétrie à chaque ligne ;

mais aussi la suite des entiers sur la deuxième colonne et la deuxième diagonale ;

et enfin la somme des entiers sur la troisième colonne et la troisième diagonale.

Pourquoi des coefficients « binomiaux » ? Vers la formule du binôme de Newton

Si a et b sont deux nombres réels (un binôme en fait) alors $(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$ $\qquad (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}a^b + \binom{2}{2}b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

On étendra plus tard ces formules avec un entier naturel n quelconque.

Une autre situation de dénombrement

Il s'agit de la répétition d'une même expérience ou épreuve, un certain nombres de fois.
Cette situation ne porte pas de nom particulier (contrairement aux « permutations » ou « combinaisons »), mais nous la rencontrerons fréquemment en probabilités.

Exemples

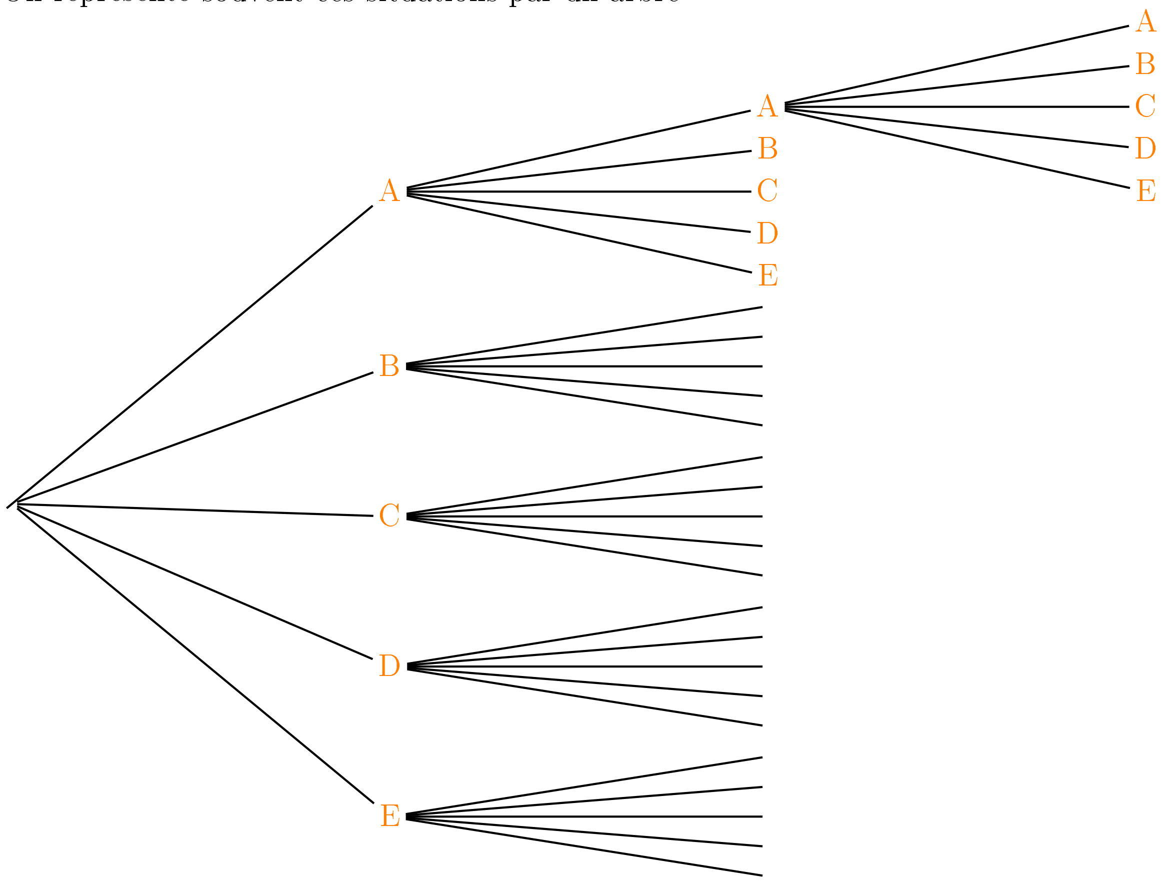
1. On répète le lancer d'une pièce, « pile » (P) ou « face » (F) :
- après 1 lancer, il y a 2 tirages possibles : P ou F ;
- après 2 lancers, il y a $2^2 = 4$ tirages possibles : PP, PF, FP ou FF ;
- après 3 lancers, il y a $2^3 = 8$ tirages possibles : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, ou FFF ;

  ...
- après n lancer, il y a 2^n tirages possibles.

2. Un sac contient les lettres A, B, C, D et E, on pioche 10 fois de suite une lettre, avec remise. Combien de mots peut-on former ?

A chaque tirage, on a 5 possibilités, donc par exemple au bout de 2 tirages, on peut former $5^2 = 25$ mots, puis au bout de 10 tirages, on peut en former $5^{10} = 9\,765\,625$

On représente souvent ces situations par un arbre



Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Dénombrer sur des cas concrets	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8	6
Démonstrations ensemblistes	9.(1 et 2), 11.(1, 2 et 3)	9.(3 et 4), 10, 11.4
Calculs avec coefficients binomiaux	12, 13	
Exercices plus théoriques	14, 17.1	15, 16, 17.(2 et 3)