

Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Racine et factorisation	1, 2, 4	3, 8
Polynôme nul	12	11
Binôme de Newton	14	15, 16
Manipuler des polynômes	6, 7, 9, 13	5, 10

Exercice 1

Soit pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = 3x^3 - x - 2$

1. Prouver que  $P$  est factorisable par  $x - 1$
2. Ecrire  $P(x)$  sous la forme d'un produit de  $(x - 1)$  par un polynôme  $Q(x)$  que l'on déterminera.
3. En déduire le signe de  $P$  sur  $\mathbb{R}$

Exercice 2

Factoriser les polynômes

$P(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$  et  $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$   
 puis résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations  $P(x) \geq 0$  et  $Q(x) \geq 0$

Exercice 3

Soit  $P$  le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

1. Déterminer toutes les racines de  $P$
2. Ecrire  $P$  sous forme scindée, c'est-à-dire « factorisée » :  

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Exercice 4

Soit la fonction polynôme définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Vérifier que  $P$  peut être factorisé par  $(x + 2)$

2. Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  

$$P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

3. En déduire toutes les racines de  $P$

4. Résoudre les équations :

a.  $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$

b.  $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  à coefficients réels et de degré 2 tels que  $P(1) = 1$  et  $P'(1) = 0$

Exercice 6

1. Soit le polynôme  $P$  défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $P(x) = (x - 2)^4$ 
  - a. Calculer  $P'(2), P''(2), P'''(2)$  (on note aussi  $P^{(1)}(2), P^{(2)}(2), P^{(3)}(2)$ )
  - b. Calculer  $P^{(4)}(2)$  et  $P^{(5)}(2)$
2. Généralisation : soit  $P$  le polynôme  $P(x) = (x - a)^n$  défini pour  $n > 0$   
 Calculer  $P^{(k)}(a)$  pour tout  $k > 0$

Exercice 7

Résoudre l'équation  $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$

Exercice 8

Soit  $P$  le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$$

1. Factoriser  $P$  au maximum.
2. Résoudre l'inéquation  $P(x) > 0$
3. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x$  réelle suivante :  

$$(\ln x)^5 + 5(\ln x)^4 + 10(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 + 7 \ln x + 2 > 0$$

Exercice 9

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré 2 possédant deux racines réelles  $\alpha$  et  $\beta$

1. Factoriser le polynôme  $P$  puis en développant l'expression obtenue, exprimer  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ . Que deviennent ces relations quand  $a = 1$  ?

2. Réciproquement, soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels distincts. On pose  $S = \alpha + \beta$  et  $P = \alpha\beta$ . Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines du polynôme  $P(x) = x^2 - Sx + P$ , que se passe-t-il si  $\alpha = \beta$  ?

3. Applications :

a. Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28 et le produit de leurs âges est égal à 192. (*indication* :  $28^2 = 784$ ).

b. Résoudre le système 
$$\begin{cases} \ln x + \ln y = 5 \\ \ln x \times \ln y = 4 \end{cases}$$

### Exercice 10

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ . On considère le polynôme  $P$  défini par :

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 x^k}{k!}$$

- Déterminer le polynôme dérivé  $P'$ , et calculer  $P'(0)$ , ainsi que le coefficient dominant de  $P'$
- Déterminer le polynôme  $P''$ , et calculer  $P''(0)$  ainsi que le coefficient dominant de  $P''$

### Exercice 11

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 4$ . On considère le polynôme  $P$  défini par :

$$P(x) = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq n-2} \frac{x+k}{k+1}$$

Déterminer les racines de  $P$  dans l'intervalle  $[0; n]$ .  $P$  peut-il admettre des racines en dehors de cet intervalle ?

### Exercice 12

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[x]$ , tel que :

$$\sum_{k=0}^n (k^2 + 2)e^k (P(k-1))^2 = 0$$

Montrer que  $P$  est le polynôme nul.

**Exercice 13** - des fractions de polynômes, les fractions rationnelles

Déterminer les réels  $a, b, c, d, e$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}, \quad \frac{2x^4}{x^3 - x} = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x} + \frac{e}{x+1}$$

### Formule du binôme (et polynômes)

**Exercice 14** - Cas pratiques

1. Calculer en fonction de l'entier naturel  $n$  :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 5^{k+1} \times 3^{n-k}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} \times 5^{n-k}$$

2. Développer  $P(x) = (-1 + 3x)^5$  et  $R(x) = (x - 2)^6$  (pour  $x \in \mathbb{R}$ )

**Exercice 15** - polynômes et sommes des coefficients binomiaux

Pour  $x$  réel et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P(x) = (1+x)^n(1+x)^n$

- Développer  $(1+x)^n$
- Développer  $(1+x)^{2n}$
- De deux manières différentes évaluer le coefficient de  $x^n$  dans  $P(x)$
- Exprimer la valeur de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  (comme un seul coefficient binomial).

**Exercice 16** - un peu pareil

Pour  $x$  réel et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

- Rappeler le développement de  $P(x) = (1+x)^n$
- Calculer  $P(1)$  et  $P(-1)$
- En déduire les valeurs de :

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \sum_{k, 0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et}$$

$$T_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = \sum_{k, 0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$