Objectifs d'apprentissage
A la fin de ce chapitre, je sais :
- ce que signifie polynôme, degré, racine. ☐
- utiliser les propriétés sur les degrés des polynômes ☐
- faire le lien entre racine et factorisation d'un polynôme ☐
- qu'un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines (ou plus) est le polynôme nul ☐
- toujours tout sur les trinômes du second degré ☐
- reconnaitre un cas d'utilisation de la formule du binôme de Newton ☐

1 Généralités sur les polynômes

1.1 Définitions

Définitions :
- on appelle **polynôme** (ou **fonction polynomiale**) une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$
où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont des réels, appelés **coefficients** du polynôme P
- l'ensemble des polynômes (à coefficients réels) est noté $\mathbb{R}[x]$
- le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le **polynôme nul**.
- a_0 est appelé le **coefficient constant** du polynôme P

Remarques :
- le polynôme nul est la fonction identiquement nulle, définie par (si on la note P) :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$
- pour dire que P est un polynôme, on pourra écrire : $P \in \mathbb{R}[x]$. Cette notation résume les deux aspects essentiels du polynôme : des coefficients dans $\mathbb{R}$ et des puissances de x ou X
On rencontrera la notation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ou $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ qui illustre ces deux aspects.
- si P est un polynôme de coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, alors $P(0) = a_0$

Exemples : les fonctions suivantes sont-elles des polynômes ?

1. $f(x) = 1 - 2x^3 + 5x^4$	☒ oui	☐ non
2. $g(x) = -3 + 2x - 5x^2 + 6x^3 - 742x^7$	☒ oui	☐ non
3. les fonctions constantes	☒ oui	☐ non
4. $h(x) = 3 + 2x - 51x\sqrt{x}$	☐ oui	☒ non
5. $P(x) = 4 + 2x - 6x^2 + x^{5/2} - x^\alpha$	☐ oui	☒ non

Propriétés	**Exemples**
Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$	soit P défini par $P(x) = 2 - x + 4x^2 - x^3 + 2x^5$ alors $P'(x) = -1 + 8x - 3x^2 + 10x^4$
soit P et Q deux polynômes, et soit λ un réel, alors λP, $P+Q$ et PQ sont des polynômes.	soit P et Q définis par : $P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = x^3 - x + 2$ alors $(-5Q)(x) = -5x^3 + 5x - 10$ $(P+Q)(x) = x^3 + x^2 + 3$ $(PQ)(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 2)$ $(PQ)(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + x^4 - x^2 + 2x + x^3 - x + 2$ $(PQ)(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$

1.2 Degré d'un polynôme

<table>
<tr><td>

Définitions : soit un polynôme
$P : x \mapsto a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

- si $a_n \neq 0$, a_n est appelé le **coefficient dominant** du polynôme P
- si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** du polynôme P. On note alors $\deg(P) = n$

Propriété : deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (et de fait le même degré).

Corollaire : deux polynômes de degrés différents ne peuvent pas être égaux.

</td><td>

1. les trinômes sont des polynômes de degré 2.
En effet, pour T une fonction trinôme,
on a $T(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. a est le coefficient dominant du polynôme T
2. Le polynôme P défini par :
$P(x) = 54 - 2x + 4x^5 - 112x^9$ est de degré 9, son coefficient dominant vaut -112
3. Le polynôme P défini par $P(x) = 6$ est de degré 0 (P est une fonction constante, P n'a qu'un seul coefficient, $a_0 = 6$).
4. On ne peut pas définir ainsi le degré du polynôme nul puisque tous ses coefficients sont nuls. Par convention, on pose que son degré égale $-\infty$

</td></tr>
<tr><td>

Propriété : soit P et Q deux polynômes non nuls, et λ un réel non nul, alors

- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

</td><td>

soit P et Q définis par :
$P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = x^3 - x + 2$
$\deg(-5Q) = \deg(Q) = 3$ $\quad$ $\deg(P+Q) \leqslant 3$
$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q = 5$
Obtient-on le même résultat qu'avec les calculs plus haut ? Oui

Contre-exemple : $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ n'est pas vraie, en effet les coefficients dominants peuvent s'annuler, par exemple avec
$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $Q(x) = -x^3$

</td></tr>
<tr><td>

Propriété : soit P un polynôme de degré n avec $n \geqslant 1$, alors P' est un polynôme, de degré $n - 1$

</td><td>

1. si P est défini par $P(x) = -5 + \sqrt{2}x + \ln(3)x^4 - 2x^6$, alors $\deg(P) = 6$ donc $\deg(P') = 5$
En effet $P'(x) = \sqrt{2} + 4\ln(3)x^3 - 12x^5$
2. si P est défini par $P(x) = -103$, alors $\deg(P) = 0$, $P' = 0$ et $\deg(P') = -\infty$
3. soit P tel que $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, et Q tel que $Q(x) = -1 + 3x + 21x^2$
   - **a.** à quelle condition (sur a, b, c, d) a-t-on $P' = Q$?
$b = -1 \quad c = 1,5 \quad d = 7$
   - **b.** quel est l'unique polynôme P (de degré 3) tel que $P' = Q$ et $P(0) = \sqrt{3}$? $\quad a = \sqrt{3}$

</td></tr>
<tr><td>

Notation : on note $\mathbb{R}_n[x]$ ($n \in \mathbb{N}$) l'ensemble des polynômes (à coef. réels), de degré inférieur ou égal à n

</td><td>

1. si P est défini par $P(x) = -\dfrac{2}{5}x + 1$, alors
$P \in \mathbb{R}_1[x]$, mais aussi $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $P \in \mathbb{R}_3[x]$...
2. par convention le polynôme nul est élément de $\mathbb{R}_n[x]$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$
3. dans $\mathbb{R}_0[x]$, il y a tous les polynômes de degré 0 (qui sont les fonctions constantes avec la constante non nulle), et le polynôme nul.

</td></tr>
</table>

2 Racines d'un polynôme

Définition : on dit qu'un réel α est une **racine** d'un polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$

Exemples :

1. soit P défini par $P(x) = (x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2)$ alors $1; -0,5$ et -2 sont des racines de P
2. soit P défini par $P(x) = x^2 + 2x + 3$ alors P n'a pas de racines $(\Delta > 0)$
3. soit P défini par $P(x) = x^3 - 2x + 1$ alors 1 est une racine évidente de P
4. soit P défini par $P(x) = x^4 + 5$ alors P n'a pas de racine car pour tout x réel, $P(x) \geqslant 5 > 0$

Théorème : soit P un polynôme de degré n avec $n \geqslant 1$, et α un réel.
Si α est une racine de P, alors on peut factoriser P par $(x-\alpha)$, i.e. il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

Corollaire :

lorsque α est une racine de P alors le polynôme Q du théorème est unique et son degré vaut $n-1$

Exemples :

1. Soit P défini par : $P(x) = 3x^3 + 10x^2 - 3x - 10$
   - **a.** Vérifier que 1 est une racine évidente de P
     $P(1) = 3 \times 1^3 + 10 \times 1^2 - 3 \times 1 - 10 = 0$
   - **b.** Trouver le polynôme Q tel que :
     $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)Q(x)$
     Q est de degré $2, Q(x) = ax^2 + bx + c$
     donc $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
     $Q(x) = 3x^2 + 13x + 10$
   - **c.** Ecrire P sous forme factorisée
     Q admet deux racines : -1 et $-\dfrac{10}{3}$ donc
     $P(x) = 3(x-1)(x+1)\left(x - \dfrac{10}{3}\right)$
2. Soit P défini par $P(x) = x^2 + 1$
   P peut-il s'écrire sous forme factorisée ? Non car $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$, donc P n'a pas de racine.
3. Soit P défini par $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$
   P peut-il s'écrire $P(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$?
   Non car : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = xQ(x)$, avec $Q(x) = x^2 - 2x + 4$, et le polynôme Q n'a pas de racine.

Théorème : soit P défini par

$P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, de degré n,

avec $n \geqslant 1$, alors :

- P a au plus n racines distinctes.
- Si P a exactement n racines distinctes : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alors P s'écrit sous forme factorisée :

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

Remarque : c'est une conséquence directe du théorème précédent et du degré du produit.

Exemple et contre-exemple :

soit P défini par $P(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$\deg(P) = 5$, pourtant P n'a que trois racines distinctes.
en effet $P(x) = x(x^4 - 2x^2 + 1) = x(x^2-1)^2$
donc $P(x) = x(x-1)^2(x+1)^2$ (forme factorisée).

⚠ Admettre une forme factorisée ne veut donc pas dire avoir n racines distinctes.

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ ayant au moins $n+1$ racines est forcément le polynôme nul.

3 Jouons un peu avec les polynômes

3.1 Division euclidienne

De même que pour tout couple d'entiers n et d, il existe un unique couple d'entiers q et r tels que :

$$n = d \times q + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < d$$

pour tout couple de polynômes A et B de $\mathbb{R}[x]$, il existe un unique couple de polynômes Q et R de $\mathbb{R}[x]$ tels que

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \deg(R) < \deg(B)$$

Comme pour les entiers, Q s'appelle **le quotient** et R le **reste** (de la division euclidienne).

Rappels : pour les entiers, cela revient à trouver ce qu'il reste après partage équitable.
Par exemple si on veut partager équitablement 30 billes entre 7 enfants, chacun aura 4 billes et il en restera 2 : $30 = 7 \times 4 + 2$

Méthode avec les polynômes :

déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de $A(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 5$ par $B(x) = x^2 - 2$

1. on détermine le degré du quotient et du reste, ici ce sera forcément 1 et au plus 1
2. on pose $Q(x) = ax + b$ et $R(x) = cx + d$ (ils sont uniques) puis on identifie les coefficients :
   $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow A(x) = (x^2 - 2)(ax + b) + cx + d = ax^3 + bx^2 - 2ax - 2b + cx + d$
   $\Leftrightarrow A(x) = ax^3 + bx^2 + (c - 2a)x - 2b + d \Leftrightarrow a = 2 \quad b = 1 \quad c - 2a = -5 \quad d - 2b = 5$
   $\Leftrightarrow a = 2 \quad b = 1 \quad c = -1 \quad d = 7$
   donc $A(x) = (x^2 - 2)(2x + 1) - x + 7$

Remarques :

- le reste peut être le polynôme nul (son degré vaut alors $-\infty$), ce qui revient à une factorisation.
- comme beaucoup de méthodes, on peut en faire un algorithme et utiliser un programme pour déterminer quotient et reste.

3.2 Binôme de Newton (pas réservée aux polynômes)

Comme nous l'avons vu en dénombrement, les identités remarquables (étendues aux puissances supérieures) font apparaitre des nombres de combinaisons (d'où le terme de **coefficient binomial**). Cela se généralise avec la formule suivante.

Propriété - formule du binôme de Newton :
pour tout entier naturel n et pour tous réels a et b :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemples : $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{4-k} = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0$

donc $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a^3 b + a^4$

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k$

$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$(2+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 2^{12-k} x^k$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$