Corrigé *total sur 62 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *5 points - 0,5 point par question*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geqslant 0$

Vrai le résultat de l'exponentielle est toujours positif.

b) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

Faux, par exemple $(-10)^2 = 10^2$ mais $-10 \neq 10$

c) $|x^n| = |x|^n$

Vrai, cf. cours

d) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = an + b$ (avec a et b réels), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Vrai, on trouve alors $u_{n+1} = a(n+1) + n = an + b + a = u_n + a$, ce qui correspond à la définition d'une suite arithmétique.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$

Faux, pour s'en convaincre, on prend $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} k$

Faux, on peut tester avec $n = 2$ pour s'en convaincre.

Un changement d'indice $j = k + 1$ donnerait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \sum_{j=2}^{n+1} j$

g) $\displaystyle\sum_{k=3}^{37} 4 = 140$

Vrai,il suffit de compter le nombre de 4 dans la somme, il y en a 35 donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{37} 4 = 35 \times 4 = 140$

h) la fonction $x \mapsto \sqrt{x + x^3}$ est impaire

Faux, elle n'est même pas définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 (on ne peut comparer $f(1)$ à $f(-1)$).

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$

Faux, $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$ et $\lfloor 0,5 \rfloor = 0$

j) $\dbinom{2024}{1} = 1$

Faux, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dbinom{n}{1} = n$ donc $\dbinom{2\,024}{1} = 2\,024$

Exercice 2 - questions diverses et indépendantes *9 points*

1. Traduire mathématiquement les phrases suivantes en utilisant des quantificateurs :

a. l'exponentielle de tout réel est strictement positive ; *0,5 point*

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

b. le carré de tout nombre entier est supérieur à lui-même. *0,5 point*

$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \geqslant n$

2. Résoudre l'inéquation : $x^2 - 4|x| \leqslant 5$ *2 points*

1$^{\text{er}}$ cas : $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$ et l'équation devient $x^2 - 4x \leqslant 5$
or $x^2 - 4x \leqslant 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$
nous sommes ramenés à l'étude du trinôme $x^2 - 4x - 5$ qui admet -1 pour racine évidente et de fait 5 comme deuxième racine
comme $a > 0$, ce trinôme est négatif entre les racines, i.e. sur $[-1; 5]$, comme de plus nous nous sommes placés dans le cas $x \geqslant 0$, on trouve $\mathscr{S}_1 = [0, 5]$

2$^{\text{ème}}$ cas : $x < 0$ alors $|x| = -x$ et l'équation devient $x^2 + 4x \leqslant 5$
or $x^2 + 4x \leqslant 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$
nous sommes ramenés à l'étude du trinôme $x^2 + 4x - 5$ qui admet 1 pour racine évidente et de fait -5 comme deuxième racine
comme $a > 0$, ce trinôme est négatif entre les racines, i.e. sur $[-5; 1]$, comme de plus nous nous sommes placés dans le cas $x < 0$, on trouve $\mathscr{S}_2 = [-5, 0[$

finalement $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = [-5; 5]$

Remarque : on peut observer d'emblée que si x est solution alors $-x$ l'est aussi (car la fonction $f(x) = x^2 - 4|x| - 5$ est paire), donc on peut étudier l'inéquation uniquement sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor = n$ *2 points*

On peut remarquer dans un premier temps que pour $k \leqslant n, 0 \leqslant \dfrac{k}{n+1} < 1$ et donc $\left\lfloor \dfrac{k}{n+1} \right\rfloor = 0$
de plus pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n, 1 \leqslant \dfrac{k}{n+1} \leqslant \dfrac{2n}{n+1} < \dfrac{2n+2}{n+1}$ donc $1 \leqslant \dfrac{k}{n+1} < 2$ et donc $\left\lfloor \dfrac{k}{n+1} \right\rfloor = 1$
en utilisant la relation de Chasles, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor + \sum_{k=n+1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor$
donc d'après le travail préparatoire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} 0 + \sum_{k=n+1}^{2n} 1$
or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 1 = (2n-(n+1)+1) \times 1 = n$ et finalement $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor = 0 + n = n$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 6$. Donner une expression explicite de u_n *2 points*

On reconnait une suite arithmético-géométrique, on cherche dans un premier temps un point fixe :
$\alpha = 4\alpha - 6 \Leftrightarrow 3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2$
on introduit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 2$
soit $n \in \mathbb{N}$, par définition $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ donc par définition de $u_n, v_{n+1} = 4u_n - 6 - 2$
donc $v_{n+1} = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2) = 4v_n$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4
donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4^n v_0$, or $v_0 = u_0 - 2$ et $u_0 = 1$ donc $v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1) \times 4^n = -4^n$
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 2$ donc $u_n = 2 - 4^n$

5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ *2 points*
Donner une expression explicite de v_n

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on étudie donc l'équation caractéristique : $x^2 - 3x + 2 = 0$
$x^2 - 3x + 2$ admet pour racines (évidentes) 1 et 2 donc par propriété du cours, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda 1^n + \mu 2^n = \lambda + \mu 2^n$
or $v_0 = 1$ donc $\lambda + \mu 2^0 = 1$ i.e. $\lambda + \mu = 1$ et $v_1 = 1$ donc $\lambda + \mu 2^1 = 1$ i.e. $\lambda + 2\mu = 1$
en faisant la différence des deux équations on trouve $\lambda + 2\mu - (\lambda + \mu) = 1 - 1$ i.e. $\mu = 0$
or $\lambda + \mu = 1$ donc $\lambda = 1$ et finalement $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1$

Exercice 3 *3 points*

Charlotte se rend à la crêperie et elle a le choix entre 5 ingrédients pour garnir ses crêpes : roquefort, tomate, poisson fumé, œuf et jambon cru.

1. Dans un premier temps, Charlotte choisit une crêpe avec deux ou trois ingrédients, combien de choix peut-elle faire ? *1,5 points*

Pour faire une crêpe à deux ingrédients, il faut en choisir deux parmi les 5 proposés,
il y a donc $\binom{5}{2}$ choix, or $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$
de même pour une crêpe à 3 ingrédients, il y a $\binom{5}{3}$ choix, or $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, donc il y a 20 choix au total.

2. Charlotte prend ensuite une deuxième crêpe dans les mêmes conditions. Combien de choix de deux crêpes Charlotte aura-t-elle pu faire au total ? (on considère que « une crêpe tomate puis une crêpe roquefort » est un choix différent de « une crêpe roquefort puis une crêpe tomate »). *1,5 points*

On est dans une situation de tirage avec remise : il y a 20 choix pour la première crêpe et, pour chacun d'eux, à nouveau 20 choix pour la deuxième, donc il y a $20^2 = 400$ « menus » à deux crêpes (i.e. une succession de deux crêpes). Comme l'indique l'énoncé, on considère ici que les menus « crêpe A puis crêpe B » et « crêpe B puis crêpe A » sont différents.

Exercice 4 *13 points*

On définit la suite u par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n - 3} + 3$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 4$ *2 points*

On montre les deux en même temps par récurrence, en définissant pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$: u_n existe et $u_n > 4$

Initialisation : $u_0 = 5$ donc u_0 existe et $u_0 > 4$, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse $u_n > 4$ donc $u_n - 3 > 1$ donc $\sqrt{u_n - 3}$ est bien défini et u_{n+1} existe
de plus $\sqrt{u_n - 3} > \sqrt{1}$ i.e. $\sqrt{u_n - 3} > 1$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $\sqrt{u_n - 3} + 3 > 1 + 3$, i.e. $u_{n+1} > 4$, donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. u_n existe et $u_n > 4$

2. Pour $x \geqslant 3$, on pose $f(x) = \sqrt{x - 3} + 3$ et $g(x) = f(x) - x$

a. Pour $x \geqslant 3$, calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de $g(x)$ *2,5 points*

Précision, g n'est pas dérivable en 3 (du fait de la racine), mais cela n'empêche pas d'étudier g sur $[3, +\infty[$
Par définition, $g(x) = \sqrt{x-3} + 3 - x = \sqrt{u(x)} + 3 - x$ (avec $u(x) = x - 3$ et donc $u'(x) = 1$)
donc $\forall x > 3, g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} - 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} - 1 = \dfrac{1 - 2\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}}$
le dénominateur de $g'(x)$ est toujours positif donc le signe de $g'(x)$ dépend de $1 - 2\sqrt{x-3}$
or $1 - 2\sqrt{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 1 \geqslant 4(x-3)$
car $x - 3 \geqslant 0$ et les fonctions carré et racine carrée sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$
donc $1 - 2\sqrt{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 3 \leqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{13}{4}$, de même on trouve $1 - 2\sqrt{x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{13}{4}$
on peut donc établir le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variations de g (sachant que $g(0) = 0$)

x	3		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$1 - 2\sqrt{x-3}$		+	0	-	
$g'(x)$	$\|$	+	0	-	
g	0	↗	$g\left(\frac{13}{4}\right)$	↘	

on peut éventuellement préciser

$$g\left(\frac{13}{4}\right) = \sqrt{\frac{13}{4} - 3} + 3 - \frac{13}{4} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

b. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de $f(x) - x$ pour $x \geqslant 3$ *1,5 points*

$g(4) = \sqrt{4-3} + 3 - 4 = \sqrt{1} - 1 = 0$
$g(3) = 0$, puis g est croissante sur $\left[3, \dfrac{13}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{13}{4}, 4\right]$ et $g(4) = 0$, donc $\forall x \in [3, 4], g(x) \geqslant 0$, i.e. $f(x) - x \geqslant 0$ et donc $f(x) \geqslant x$
de manière analogue, g est décroissante sur $[4, +\infty[$, donc $\forall x \in [4, +\infty[, g(x) \leqslant g(4)$ i.e. $g(x) \leqslant 0$ soit $f(x) - x \leqslant 0$ et donc $f(x) \leqslant x$

3. Montrer que la suite u est décroissante. *1 point*

D'après **1.**, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 4$ et d'après **2.b.** $x \geqslant 4 \Rightarrow f(x) \leqslant x$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite u est décroissante.

4. On introduit la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n - 3)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n$ existe. *0,5 point*

v_n existe dès lors que le logarithme est bien défini, i.e. $u_n - 3 > 0$, ce qui est bien le cas puisque d'après **1.** $u_n > 4$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$

5. Reconnaitre la suite v et exprimer v_n en fonction de n *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la suite u, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 3} + 3$, donc $u_{n+1} - 3 = \sqrt{u_n - 3}$
on peut appliquer le logarithme de part et d'autre de l'égalité car il s'agit de nombres strictement positifs
donc $\ln(u_{n+1} - 3) = \ln\left(\sqrt{u_n - 3}\right) = \ln\left((u_n - 3)^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(u_n - 3)$
donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ par définition de la suite v
donc v est une suite géométrique et donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n v_0 = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$ car $v_0 = \ln(u_0 - 3)$ et $u_0 = 5$

6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n *1 point*

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n - 3) = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$ donc $\exp(\ln(u_n - 3)) = \exp\left(\dfrac{\ln(2)}{2^n}\right)$

donc $u_n - 3 = \exp\left(\dfrac{\ln(2)}{2^n}\right)$ et donc $u_n = 3 + \exp\left(\dfrac{\ln(2)}{2^n}\right)$

ce que l'on peut aussi écrire $u_n = 3 + 2^{\frac{1}{2^n}}$ car $\dfrac{\ln(2)}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\ln(2) = \ln\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)$

7. Avec Python,

a. écrire un programme qui calcule les 101 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1,5 points*

En partant de $u_0 = 5$ et à l'aide d'une boucle `for`, on calcule de manière itérative les valeurs de u_n, en ayant préalablement importé la librairie `numpy` pour avoir accès à la racine carrée :

```python
import numpy as np
u=5 # on définit u0
print(u) # pour afficher u0
for n in range (1,101) :
  u=np.sqrt(u-3)+3 # on calcule le terme suivant
  print(u)
```

Nota bene : on aurait aussi pu utiliser la formule explicite trouvée à la question **6.** pour le calcul des termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui évite le calcul récursif).

b. Le programme renvoie `4.4142 ; 4.1892 ; 4.0905 ; 4.0443 ; 4.0219 ; 4.0109 ; 4.0054 ; 4.0027 ; 4.0014 ; 4.0007 ...` Emettre une conjecture sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *0,5 point*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 4, ce qui est cohérent avec plusieurs résultats trouvés précédemment : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 4 (même si cela ne garantit pas qu'elle converge vers 4).

et dans l'expression de u_n trouvée au **6.** $u_n = 3+\exp\left(\dfrac{\ln(2)}{2^n}\right)$, on remarque que le contenu de l'exponentielle tendra vers 0 (car 2^n tend vers $+\infty$) et donc l'exponentielle tendra vers $e^0 = 1$ et de fait u_n tendra vers $3 + 1 = 4$

c. En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *1 point*
déterminer le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-5}$

On utilise ici une boucle *while* et on calcule les termes (de manière itérative, comme plus haut) tant que la précision souhaitée n'est pas atteinte, i.e. tant que $|u_n - 4| > 10^{-5}$ que l'on peut écrire $u_n - 4 > 10^{-5}$ car la suite est décroissante et tend vers 4 (les termes sont donc toujours supérieurs ou égaux à la limite).

On incrémente également la valeur de n à chaque passage dans la boucle et on demande d'afficher la valeur de n à l'issue de la boucle (qui donne le premier terme qui ne respecte pas la condition, ce que nous cherchons).

```python
u=5 # on définit u0
n=0 # on créée une variable pour le rang
while u-4>10**(-5): # ou np.abs(u-4)
 u=np.sqrt(u-3)+3 # on calcule le terme suivant
 n=n+1 # on met à jour la valeur de n

print(n)
```

Exercice 5 - étude d'une somme *3 points*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, k \times k! = (k + 1)! - k!$ *1 point*

$(k + 1)! - k! = (k + 1) \times k! - k! = (k + 1 - 1) \times k! = k \times k!$

2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n. Vérifier avec S_3 *2 points*

D'après l'égalité précédente, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}[(k + 1)! - k!]$

il s'agit d'une somme télescopique, en posant $a_k = k!$, on a alors $a_{k+1} = (k + 1)!$ et donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$

et donc par télescopage $S_n = a_{n+1} - a_1 = (n + 1)! - 1! = (n + 1)! - 1$

on peut le vérifier avec S_3 : d'après la formule que vous venons de démontrer $S_3 = 4! - 1 = 24 - 1 = 23$

Et en utilisant la définition, $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} k \times k! = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! = 1 + 4 + 18 = 23$, c'est cohérent.

Exercice 6 - deux suites et une somme *8 points*

On étudie les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la façon suivante : $\begin{cases} a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$

1. De quel type est la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire une expression de b_n en fonction de n *0,5 point*

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 1 \times 2^n = 2^n$

2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n

a. Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et préciser son premier terme. *1,5 points*

Par définition $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$ donc $c_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{2^{n+1}} = \dfrac{2a_n}{2^{n+1}} + \dfrac{b_n}{2^{n+1}}$ par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
or $\dfrac{2a_n}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} = c_n$ et $b_n = 2^n$ d'après la question précédente, donc $\dfrac{b_n}{2^{n+1}} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$
donc $c_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{2}$ et ce pour tout entier n, donc $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et par définition $c_0 = \dfrac{a_0}{2^0} = \dfrac{0}{1} = 0$

b. En déduire une expression de c_n en fonction de n *0,5 point*

Par propriété sur les suites arithmétiques, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = c_0 + n \times \dfrac{1}{2} = 0 + n \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$

c. Déduire des questions précédentes que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n2^{n-1}$ *1 point*

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ donc $a_n = 2^n \times c_n$
or $c_n = \dfrac{n}{2}$ d'après la question précédente, donc $a_n = 2^n \times \dfrac{n}{2} = \dfrac{n2^n}{2} = n2^{n-1}$

3. Application au calcul d'une somme

a. Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$ *1 point*

Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = 2a_k + b_k = 2a_k + 2^k$ car $b_k = 2^k$
donc $a_{k+1} = a_k + a_k + 2^k$ et donc $a_{k+1} - a_k - 2^k = a_k$ d'où l'égalité demandée.

b. Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$ *0,5 point*

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)$ est une somme télescopique et d'après la propriété du cours $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_0 = a_{n+1}$
car $a_0 = 0$

c. Pour tout entier naturel n, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ *1 point*

Il s'agit d'une somme géométrique et d'après la propriété du cours :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = -(1-2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1$

d. Déduire des questions précédentes qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ *2 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque dans un premier temps que pour tout $k, a_k = k2^{k-1}$, puis en additionnant les égalités $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$ pour k compris entre 0 et n, on trouve :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k - 2^k)$ i.e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k - 2^k)$

et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k$ par linéarité

or d'après les deux questions précédentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - (2^{n+1} - 1) = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = (n+1)2^n$ d'après **1.c.**

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1)2^n - 2 \times 2^n + 1 = (n+1-2) \times 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1$

Exercice 7 - études de fonctions *21 points*

Partie I

On onsidère les fonctions P et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$ par :
$P(x) = 3x^3 - x - 2$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$ *1 point*

On va partir du terme le plus « compliqué » :
$(x-1)(3x^2+3x+2) = x(3x^2+3x+2) - (3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2 = P(x)$

2. Calculer $g'(x)$ et l'exprimer en fonction de $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire que son signe est celui de $P(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ *1,5 points*

On dérive terme à terme et on trouve :
$g'(x) = 3x^2 - 1 - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{(3x^2-1)x}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3-x}{x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3-x-2}{x} = \dfrac{P(x)}{x}$
et $\forall x \in]0;+\infty[$ le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $g'(x)$ dépend uniquement du signe du numérateur qui n'est autre que $P(x)$

3. En déduire les variations de g *2 points*

On cherche à déterminer le signe de $g'(x)$ et d'après la question précédente, il suffit d'étudier celui de $P(x)$:
dans un premier temps, on remarque que le trinôme $3x^2+3x+2$ n'admet pas de racine car son discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 = -15$ et comme le coefficient a est strictement positif (il vaut 3), ce trinôme est toujours strictement positif donc $P(x)$ qui vaut $(x-1)(3x^2+3x+2)$ est du signe de $x-1$, or $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$
de plus $g(1) = 1^3 - 1 + 3 - 2\ln(1) = 1 - 1 + 3 - 0 = 3$, d'où le tableau de signes et de variations :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

4. En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$ *0,5 point*

D'après l'étude précédente, g admet pour minimum 3 donc $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geqslant 3$ et a fortiori $g(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x+1+\dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Ecrire un programme Python qui définit la fonction f *1 point*

On utilise la syntaxe habituelle pour la définition de fonction, en ayant préalablement importé `numpy` pour le logarithme.

```
import numpy as np
def f(x):
  return x+1+(x-1+np.log(x))/x**2
```

2. Dériver f et mettre le résultat sous la forme $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^k}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, où k est un entier dont on précisera la valeur. *2 points*

Soit $x \in]0;+\infty[$, on pose $u(x) = x - 1 + \ln(x)$ et $v(x) = x^2$, on a alors $u'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$
et de fait $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = 1 + \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 + \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - (x-1+\ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2}$

$$\text{donc } f'(x) = 1 + \frac{x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)x - 2(x-1+\ln(x))\right]}{x^4} = 1 + \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x - 2(x-1+\ln(x))}{x^3} = 1 + \frac{x+1-(2x-2+2\ln(x))}{x^3}$$
$$= 1 + \frac{x+1-2x+2-2\ln(x)}{x^3} = 1 + \frac{-x+3-2\ln(x)}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} + \frac{-x+3-2\ln(x)}{x^3} = \frac{x^3-x+3-2\ln(x)}{x^3}$$
$$= \frac{g(x)}{x^3} \text{ d'où le résultat demandé avec } k = 3$$

3. En déduire les variations de f *1 point*

D'après **I.4.**, $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$ et de plus $\forall x \in]0;+\infty[, x^3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) > 0$
car $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ d'après la question précédente
donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

4. Déterminer une équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 *1 point*

Par propriété, T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
or $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1^3} = \dfrac{3}{1} = 3$ et $f(1) = 1 + 1 + \dfrac{1-1+\ln(1)}{1^2} = 2 + \dfrac{0}{1} = 2$
donc $T_1 : y = 3(x-1) + 2 = 3x - 3 + 2$ i.e. T_1 a pour équation $y = 3x - 1$

5. Ecrire un programme Python qui trace f et sa tangente T_1 sur l'intervalle $[0,1;7]$ *1,5 points*

On importe `matplotlib.pyplot` pour la représentation, on définit une liste d'abscisses entre $0,1$ et 7 avec `np.linspace`, puis on définit deux listes d'ordonnée, une pour f en utilisant la fonction f définie précédemment, et une pour la tangente. Enfin on utilise deux fois la commande plot pour voir les deux courbes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0.1, 7, 100)
y=f(x)
z=3*x-1
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,z)
plt.show()
```

6. Montrer que $\forall x \geqslant 1, f(x) \geqslant x+1$ et que $\forall x \in]0,1], f(x) \leqslant x+1$ *2 points*
En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x+1$

On peut remarquer dans un premier temps que la comparaison de $f(x)$ et $x+1$ revient à étudier $f(x) - (x+1)$
or $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = x + 1 + \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$ donc $f(x) - (x+1) = \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$
et x^2 étant toujours positif, le signe de $f(x)-(x+1)$ est donc celui de $x - 1 + \ln(x)$

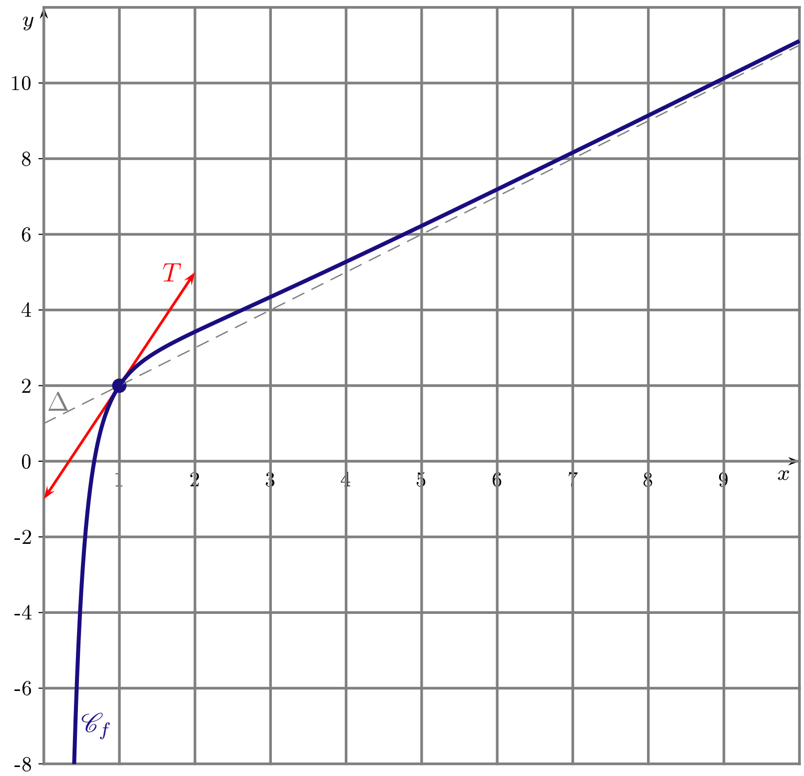
1^er^ cas : $x \geqslant 1$ alors $x - 1 \geqslant 0$ et d'autre part par croissance du logarithme $\ln(x) \geqslant \ln(1)$ i.e. $\ln(x) \geqslant 0$
donc dans ce cas $f(x) - (x+1)$ est l'addition de deux termes positifs, donc $f(x) - (x+1) \geqslant 0$

2^ème^ cas : $x \in]0,1]$, alors de manière analogue $x - 1 \leqslant 0$ et $\ln(x) \leqslant 0$
et dans ce cas $f(x)-(x+1)$ est l'addition de deux termes négatifs, donc $f(x) - (x+1) \leqslant 0$
donc sur l'intervalle $]0,1], \mathscr{C}_f$ se trouve en-dessous de la droite d'équation $y = x+1$, puis elle se trouve au-dessus de cette droite sur l'intervalle $[1,+\infty[$

7. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$

On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2} = 0$ *2,5 points*

On utilise les informations que nous avons à notre disposition :
- $f(1)$
- l'équation de la tangente
- la position relative de f par rapport à la droite Δ
- la limite en 0
- enfin le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2} = 0$ signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$ et donc que $\mathscr{C}_f$ se rapproche de Δ quand x tend vers l'infini.



Partie III

On considère la fonction h définie par $h(x) = x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_h$, l'ensemble de définition de h, puis son ensemble de dérivabilité et dériver h *2 points*

   Par définition des puissances quelconques, $h(x) = \exp\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right]$, deux contraintes limitent donc la définition de h : le terme $\frac{1}{x}$ et le logarithme, donc $x \neq 0$ et $x \in]0;+\infty[$ soit $\mathscr{D}_h =]0;+\infty[$
   il n'y a pas de contrainte supplémentaire pour la dérivabilité (pas de racine carrée ou de valeur absolue), donc h est dérivable sur $\mathscr{D}_h$
   de plus, pour $x \in]0;+\infty[, h$ s'écrit $h(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)$ donc $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
   or u s'écrit $u = vw$ avec $v(x) = 1-\frac{1}{x}$ et $w(x) = \ln(x)$; et de fait $v'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$ et $w'(x) = \frac{1}{x}$
   donc $u' = v'w + vw' \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
   ce que l'on peut aussi écrire $u'(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)+x-1}{x^2}$
   et finalement $\forall x \in]0;+\infty[, h'(x) = \frac{x-1+\ln(x)}{x^2}\exp\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right] = \frac{x-1+\ln(x)}{x^2}x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

2. A l'aide de la question **II.6.**, donner les variations de h *1 point*

   En remarquant que $\frac{x-1+\ln(x)}{x^2} = f(x)-(x+1)$ et que $x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est toujours positif (c'est le résultat d'une exponentielle), on en déduit que $h'(x) = (f(x)-(x+1))x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est du signe de $f(x)-(x+1)$ que nous avons étudié à la question **II.6.**, on peut donc établir le tableau suivant, en utilisant également que $h(1) = 1^{\left(1-\frac{1}{1}\right)} = 1^0 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x+1)$	‖	-	0	$+$	
$h'(x)$	‖	-	0	$+$	
h	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

3. Résoudre l'équation $h(x) \geqslant x$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = x$ *2 points*

   Soit $x \in]0;+\infty[$, alors $h(x) \geqslant x \Leftrightarrow x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)} \geqslant x \Leftrightarrow \frac{x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x} \geqslant 1$ (car $x > 0$) $\Leftrightarrow x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)-1} \geqslant 1$
   donc $h(x) \geqslant x \Leftrightarrow x^{\left(-\frac{1}{x}\right)} \geqslant 1 \Leftrightarrow \ln\left(x^{\left(-\frac{1}{x}\right)}\right) \geqslant \ln(1)$ en composant par ln (ou exp pour le sens retour) qui sont des fonctions croissantes
   donc $h(x) \geqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\ln(x) \geqslant 0$ (propriété du logarithme : $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$)
   or $\frac{1}{x}$ est toujours positif pour $x \in]0;+\infty[$ et donc $-\frac{1}{x}$ est toujours négatif
   donc $-\frac{1}{x}\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$
   d'où $h(x) \geqslant x \Leftrightarrow x \leqslant 1$
   et de fait $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $]0,1]$ et on montre de-même que $\mathscr{C}_h$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ sur $[1,+\infty[$