

*Devoir à faire en binôme obligatoirement, vous rendrez une copie pour deux.*

### Exercice 1

Le centre d'une ville des Etats-Unis comprend 10 rues toutes orientées Sud-Nord numérotées de 1 à 10 ; la rue la plus à l'ouest portant le numéro 1

Elle comprend également 8 avenues perpendiculaires, toutes orientées ouest-est et numérotées de 1 à 8 ; la plus au sud portant le numéro 1  
Bob habite au carrefour First Street et First Avenue ; son école se trouve au carrefour Ninth Street et Seventh Avenue ; pour aller à l'école, il ne se dirige que vers l'est et le nord.

*La calculatrice est (presque) nécessaire pour certaines questions.*

1. Faire un schéma.
2. Quel est le nombre de chemins parmi lesquels Bob peut choisir son itinéraire chaque matin.
3. Au carrefour de Fourth Street et Fourth Avenue, il y a un marchand de glaces : combien y a-t-il de chemins pour aller à l'école qui permettent à Bob de manger une glace ?
4. John, un ami de Bob, habite sur la Third Avenue, à mi-chemin entre la Sixth Street et la Seventh Street ; combien y a-t-il de chemins permettant à Bob de passer chez John et de finir la route avec lui ?

### Exercice 2 - des fonctions polynomiales

On considère le polynôme  $P$  défini par  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Factoriser le polynome  $P$  au maximum.
2. Résoudre l'équation  $e^{2x} - 6e^x + 11 - 6e^{-x} = 0$
3. Résoudre l'inéquation  $(\ln(x))^3 - 6(\ln(x))^2 + 11 \ln(x) - 6 > 0$

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$   
Soit  $u$  la suite de terme général  $u_n$ , définie par son premier terme  $u_0 = 0$  et pour  $n \in \mathbb{N}$  par la relation suivante :  $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$

1. Avec Python,
  - a. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier  $n$  et renvoie  $u_n$
  - b. Ecrire un programme qui crée une liste contenant les 100 premiers termes de la suite  $u$ , puis représente graphiquement la suite avec ces termes et sous la forme d'un nuage de points.
  - c. Emettre une conjecture sur la convergence de la suite.
  - d. En notant  $\ell$  la limite de la suite, déterminer le premier rang de la suite pour lequel  $|u_n - \ell| \leq 10^{-5}$
2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$
3. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$
4. Pour  $x \geq 0$ , factoriser l'expression  $f(x) - x$
5. Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$  réelle.
6. Montrer que  $\forall x \in [0; 1], f(x) - x \geq 0$
7. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$
8. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$
9. Dédire des questions précédentes les variations de la suite  $u$
10. Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^{n-1}}$