

Quelques corrigés

Exercice 3

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

1. Déterminer toutes les racines de P .

$-1, 1$ et 2 sont des racines évidentes car $P(-1) = -1 - 4 - 4 + 2 + 5 + 2 = 0$ $P(1) = 1 - 4 + 4 + 2 - 5 + 2 = 0$ et $P(2) = 2^5 - 4 \times 2^4 + 4 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 32 - 64 + 32 + 8 - 10 + 2 = 0$ donc P est factorisable par $(x+1)(x-1)(x-2)$

donc P s'écrit $P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2 car $\deg((x+1)(x-1)(x-2)) = 3$ donc $\deg P = 3 + \deg Q$ donc $\deg Q = \deg P - 3 = 5 - 3 = 2$ En écrivant $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, on a donc

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x-1)(x-2)(ax^2 + bx + c) \\ &= (x^2 - 1)(x-2)(ax^2 + bx + c) = (x^3 - 2x^2 - x + 2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^5 + bx^4 + cx^3 - 2ax^4 - 2bx^3 - 2cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \end{aligned}$$

$$= ax^5 + (b-2a)x^4 + (c-2-a)x^3 + (2a-2c-b)x^2 + (2b-c)x + 2c$$

donc par identification des coefficients, entre autres $a = 1, b-2a = -4$ et $2c = 2$ donc $a = 1, b = -4 + 2a = -2$ et $c = 1$

$$\text{donc } Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

de fait $P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^3(x-2)$

donc P admet $-1, 1$ et 2 comme racines (1 est une « racine triple »).

2. Ecrire P sous forme scindée, c'est-à-dire « factorisée » : cf. 1.

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$

Exercice 8

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2$$

1. Factoriser P au maximum.

Il nous faut trouver des racines évidentes. On peut remarquer que aucun nombre positif ne peut être positif car on a alors une somme

de terme positif $+2$ donc P ne pourra s'annuler. Il faut donc regarder du côté des nombres négatifs.

On trouve que -1 est une racine évidente car

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^5 + 5 \times (-1)^4 + 10 \times (-1)^3 + 11 \times (-1)^2 + 7 \times (-1) + 2 \\ &= -1 + 5 - 10 + 11 - 7 + 2 = -18 + 18 = 0 \end{aligned}$$

On trouve que -2 est une racine évidente car

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^5 + 5 \times (-2)^4 + 10 \times (-2)^3 + 11 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2 \\ &= -32 + 5 \times 16 + 10 \times (-8) + 44 - 14 + 2 = 0 + 80 - 80 \end{aligned}$$

donc P peut s'écrire $P(x) = (x+1)(x+2)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 3 : $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d des réels

$$\begin{aligned} \text{donc } P(x) &= (x^2 + 3x + 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + 3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 3dx + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d \\ &= ax^5 + (b+3a)x^4 + (c+3b+2a)x^3 + (d+2b+3c)x^2 + (3d+2c)x + 2d \end{aligned}$$

donc par identification on trouve entre autres : $a = 1, b+3a = 5, c+3b+2a = 10$ et $2d = 2$

donc $a = 1, b = 5 - 3 = 2, c = 10 - 6 - 2 = 2$ et $d = 1$

donc $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

-1 est également racine évidente de Q car

$$Q(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$$

donc de même, Q peut s'écrire

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+1)(a'x^2 + b'x + c') = a'x^3 + b'x^2 + c'x + a'x^2 + b'x + c' \\ &= a'x^3 + (b'+a')x^2 + c'x + b'x + c' \end{aligned}$$

donc par identification, $a' = 1, b' + a' = 2$ et $c' = 1$

donc $a' = b' = c' = 1$

donc $P(x) = (x+1)^2(x+2)(x^2+x+1)$

or x^2+x+1 n'admet pas de racine (son discriminant est strictement négatif : $\Delta = -3$)

donc on ne peut pas factoriser plus P

2. Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ car ce trinôme n'admet pas de racine et le coefficient de x^2 est strictement positif, donc $P(x)$ est du signe de

$$(x+1)^2(x+2)$$

de plus $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 \geq 0$

et $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

on peut donc établir le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	+	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	+

3. Résoudre l'inéquation d'inconnue x réelle suivante :

$$(\ln x)^5 + 5(\ln x)^4 + 10(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 + 7\ln x + 2 > 0$$

Cette inéquation n'a de sens que pour $x > 0$. Soit $x > 0$, alors $(\ln x)^5 + 5(\ln x)^4 + 10(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 + 7\ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow P(\ln(x)) > 0$ or d'après 2., $P(X) > 0 \Leftrightarrow X \in]-2, -1[$ ou $X \in]-1, +\infty[$ donc $P(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) \in]-2, -1[$ ou $\ln(x) \in]-1, +\infty[$

$$\Leftrightarrow -2 < \ln(x) < -1 \text{ ou } -1 < \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{-2} < e^{\ln(x)} < e^{-1} \text{ ou } e^{-1} < e^{\ln(x)}$$

car les fonctions exp et ln sont strictement croissantes

$$\Leftrightarrow e^{-2} < x < e^{-1} \text{ ou } e^{-1} < x \quad \text{car } e^{\ln(x)} = x$$

d'où $\mathcal{S} =]e^{-2}, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$

Exercice 10

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 x^k}{k!}$$

1. Déterminer le polynôme dérivé P' , et calculer $P'(0)$, ainsi que le coefficient dominant de P'

On dérive terme à terme, sachant que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la dérivée de $x \mapsto x^k$

$$\text{est } x \mapsto kx^{k-1}, \text{ et on trouve } P'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 x^{k-1}}{(k-1)!}$$

que l'on écrit $P'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 x^i}{i!}$ avec le changement d'indice $i = k-1$

donc $P'(0) = n^2$ (seul le terme d'indice $i = 0$ de la somme donne un résultat non nul).

et le terme de plus haut degré est celui pour $i = n-1$, qui vaut $\frac{n^2 x^{n-1}}{(n-1)!}$ donc le coefficient dominant est $\frac{n^2}{(n-1)!}$

2. Déterminer le polynôme P'' , et calculer $P''(0)$ ainsi que le coefficient dominant de P''

On peut écrire $P'(x) = n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^2 x^i}{i!}$ (on isole le terme de degré 0)

et de manière analogue, on trouve

$$P''(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^2 i x^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^2 x^{i-1}}{(i-1)!} \text{ soit } P''(x) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n^2 x^j}{j!}$$

avec le changement d'indice $j = i-1$

de même on trouve $P''(0) = n^2$ et que le coefficient dominant de P'' est $\frac{n^2}{(n-2)!}$

Exercice 11

Soit n un entier tel que $n \geq 4$. On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq n-2} \frac{x+k}{k+1}$$

Déterminer les racines de P dans l'intervalle $[0; n]$. P peut-il admettre des racines en dehors de cet intervalle ?

Par définition de $P, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, k \neq n-2, -k$ est une racine de P car il contient le terme $x+k$ en facteur d'un produit de polynômes de degré 1 de plus P est degré $n-1$ car il est constitué d'un produit de $n-1$ polynômes de degré 1

donc P ne peut admettre plus de $n-1$ racines (ce n'est pas le polynôme nul) et il en admet au moins $n-1$: $-k$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket, k \neq n-2$, donc P admet exactement $n-1$ racines, de plus, elles sont toutes situées dans l'intervalle $[-n, -1]$, donc aucune ne se situe dans l'intervalle $[0, n]$

Nota bene : on peut répondre plus rapidement à la première question en constatant que $\forall x \geq 0, P(x) > 0$ (produit de termes strictement positifs, donc P ne peut admettre de racine sur \mathbb{R}_+ et a fortiori, il n'en admet pas sur $[0, n]$)

Formule du binôme (et polynômes)

Exercice 15 - polynômes et sommes des coefficients binomiaux

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(x) = (1+x)^n(1+x)^n$

1. Développer $(1+x)^n$

D'après la formule du binôme,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

2. Développer $(1+x)^{2n}$

$$\text{De même, } (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

3. De deux manières différentes évaluer le coefficient de x^n dans $P(x)$

D'après 2., le coefficient de x^n dans $P(x)$ est $\binom{2n}{n}$

$$\text{Par ailleurs } P(x) = ((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)^2$$

$$\text{que l'on peut écrire } P(x) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right)$$

$$\text{donc } P(x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \binom{n}{k} x^k$$

$$\text{donc } P(x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \binom{n}{k} x^k \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{k} x^{j+k} \right)$$

$$\text{or } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, j+k=n \Leftrightarrow j=n-k$$

$$\text{donc le coefficient de } x^n \text{ dans } P(x) \text{ est } \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k}$$

$$\text{or } \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$$

$$\text{et donc le coefficient de } x^n \text{ dans } P(x) \text{ est } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

4. Exprimer la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ (comme un seul coefficient binomial).

$$\text{Par identification du coefficient de } x^n \text{ dans } P(x), \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Exercice 16 - un peu pareil

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Rappeler le développement de $P(x) = (1+x)^n$

$$\text{Cf. plus haut, } P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

2. Calculer $P(1)$ et $P(-1)$

$$P(1) = (1+1)^n = 2^n \text{ et } P(-1) = (1-1)^n = 0$$

3. En déduire les valeurs de :

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \sum_{k, 0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et}$$

$$T_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = \sum_{k, 0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

$$\text{Par ailleurs, d'après 1., } P(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = S_n + T_n$$

$$\text{et } P(-1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k, 0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{k, 0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

$$\text{donc } P(-1) = S_n - T_n$$

$$\text{finalement, d'après 2., } S_n + T_n = 2^n \text{ et } S_n - T_n = 0$$

$$\text{donc } S_n = T_n \text{ et de fait } S_n + S_n = 2^n, \text{ i.e. } 2S_n = 2^n \text{ et donc } S_n = 2^{n-1}$$