Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :
- utiliser le vocabulaire de base univers, événement, expérience aléatoire. ☐
- décrire et utiliser un système complet d'événements. ☐
- exploiter les connaissances en dénombrement pour calculer des probabilités. ☐
- interpréter et calculer une probabilité conditionnelle. ☐
- interpréter et utiliser les formules : des probabilités totales et composées et de Bayes. ☐
- interpréter et utiliser l'indépendance (deux à deux ou mutuelle) entre des événements. ☐

La construction d'arbres est toujours pertinente pour appréhender un problème en probabilités, mais on attendra des démonstrations formelles à l'aide des outils présentés dans ce chapitre.

Rappels : une expérience (ou épreuve) aléatoire est une expérience dont on ne peut prédire le résultat (si on la répéte plusieurs fois, elle ne donne pas toujours le même résultat). Avec une telle expérience, **l'univers** désigne l'ensemble des issues possibles, par exemple l'univers correspondant au lancer d'un dé à 6 faces est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Dans ce chapitre l'univers est fini (c'est-à-dire qu'il comporte un nombre fini d'issues).

Un **événement** est une partie de l'univers, on peut distinguer les événements élémentaires qui correspondent aux issues : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$; mais il en existe beaucoup d'autres : un nombre pair, un nombre supérieur ou égal à 3

1 Evénements et opérations

1.1 Evénements, définitions

Définitions : • l'**événement impossible** est celui qui ne contient aucune issue de l'expérience, c'est-à-dire $\emptyset$ • l'**événement certain** est l'événement réunissant toutes les issues de l'expérience, c'est-à-dire Ω • un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue (si l'issue est ω, on le note $\{\omega\}$)	Exemples : **1.** on lance un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6. L'événement « on obtient 5 » est un événement élémentaire. **2.** on lance une pièce de monnaie à pile ou face. Un événement certain est par exemple « on obtient pile ou face ». **3.** dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on pioche simultanément 3 boules. L'événement « on pioche les boules numéro 6, 7 et 8 » est un événement impossible.
Définition : soit A un événement. L'**événement contraire de** A est l'événement qui a lieu si et seulement si A n'a pas lieu, on le note $\bar{A}$ Il s'agit du complémentaire de A dans Ω	Exemples : on lance un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 Soit A l'événement « le résultat du lancer est pair ». On a vu que $A = \{2, 4, 6\}$. Ainsi, $\bar{A}$: « le résultat du lancer est impair », c'est-à-dire $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$, qui est bien le complémentaire de $\{2, 4, 6\}$ dans Ω

1.2 Opérations sur les événements

Les opérations sur les événements sont les mêmes que sur les ensembles, mais les notations et le vocabulaire des probabilités sont souvent spécifiques.

Définitions et propriétés : on considère deux événements A et B sur une expérience aléatoire d'univers Ω • l'événement A **ou** B est l'événement qui a lieu lorsque l'un au moins des deux événements A et B a lieu. Il s'agit de la partie $A \cup B$ de Ω • l'événement A **et** B est l'événement qui a lieu lorsque les deux événements A et B sont réalisés. Il s'agit de la partie $A \cap B$ de Ω	Exemple : on lance un dé (classique). Notons les événements A : « le résultat du lancer est pair » B : « le résultat du lancer est inférieur à 3 ». L'événement A ou B est : « le résultat du lancer est pair » ou « le résultat du lancer est inférieur à 3 » correspondant à la partie $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ Il s'agit bien de $A \cup B$, puisque $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ De même, l'événement A et B correspond à la partie $\{2\}$ égale à $A \cap B$
Définition : deux événements A et B sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent être réalisés simultanément, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$	Exemple : une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3, et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire une boule au hasard dans l'urne. Considérons les événements A : « on tire une boule blanche » et B : « On tire une boule noire ». Ces événements sont incompatibles. En effet $A = \{b_1, b_2\}$, et $B = \{n_1, n_2, n_3\}$. On a bien $A \cap B = \emptyset$

2 Système complet d'événements

Définition : on appelle **système complet d'événements** (ou **partition** de l'univers), un ensemble d'événements qui sont deux à deux disjoints et dont la réunion forme l'univers. Ecrit autrement, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements ($n \geqslant 2$), alors $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ forment un **système complet d'événements** à condition que : • si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ • $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$	Exemples de systèmes complets d'événements : Avec le lancer d'un dé : • « obtenir 1 », « obtenir 2 », ..., « obtenir 6 » • « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair » • « obtenir 2 » et « ne pas obtenir 2 » Avec la situation des 3 boules blanches et des 2 boules noires : • « obtenir une boule blanche » et « obtenir une boule noire » • « obtenir une boule numérotée 1 », « obtenir une boule numérotée 2 » et « obtenir la boule n°3 » • « obtenir la boule noire numéro 1 » et « ne pas obtenir la boule noire numéro 1 »
Remarques : ▷ un système complet d'événements est donc une façon de « ranger » tout l'univers, sans faire de double compte (on ne peut pas mettre un même élément dans deux tiroirs différents). ▷ un événement(A) et son contraire $(\overline{A})$ forment toujours un système complet d'événéments.	

3 Probabilités (ou espace probabilisé fini)

Avez-vous remarqué ? Nous n'avons toujours pas parlé de probabilité. Rassurez-vous, ça arrive ! Mais comment définir une probabilité ? Pas facile.

Dans le cas d'un ensemble fini, on pourrait essayer de définir la probabilité d'un événement A par $P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$, mais cela ne convient que dans les situations d'équiprobabilité.
Par exemple, si on s'intéresse aux naissances en France et à l'univers $\Omega = \{\text{fille, garçon}\} = \{F, G\}$.
Une telle définition donnerait $p(F) = 0,5$ et $p(G) = 0,5$

On ne pourrait donc pas traduire la situation réelle, qui d'après les statistiques, correspond à : $p(F) = 0,48$ et $p(G) = 0,52$

Comme dans tout ce chapitre, on va considérer une expérience aléatoire sur un univers Ω fini.

3.1 Probabilité, définition

Définition : une probabilité sur Ω est une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant

- ▷ pour tout événement A
  $P(A) \geqslant 0$ et $P(A) \leqslant 1$
- ▷ $P(\Omega) = 1$
- ▷ pour tous événements incompatibles A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Le couple (Ω, P) est appelé **espace probabilisé** fini, et pour un événement A, le réel $P(A)$ est appelé **probabilité de l'événement** A

$\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω

Exemple : on considère l'expérience aléatoire consistant à tirer quelque chose d'un sac contenant une carotte et un radis. On baptise ω_c la carotte et ω_r le radis. L'univers est donc $\Omega = \{\omega_c, \omega_r\}$ et les événements sont :

- l'événement (impossible) « : on ne tire rien »
- l'événement « : on tire la carotte », i.e. ω_c
- l'événement « : on tire le radis », i.e. ω_r
- l'événement (certain « : on tire la carotte et le radis », i.e. $\omega_c \cup \omega_r$

On peut définir une probabilité P sur Ω, en posant : $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\{\omega_c\}) = \frac{4}{5}$ et $P(\{\omega_r\}) = \frac{1}{5}$

On peut d'ailleurs remarquer que la probabilité P est entièrement définie par la donnée de $P(\{\omega_c\})$ (ou $P(\{\omega_r\})$) et plusieurs valeurs sont possibles.

Remarques :

- en résumé une probabilité est une application sur des ensembles (d'issues), dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 (1 étant atteint) et qui de plus est additive pour les ensembles (dès lors qu'ils sont disjoints).
- attention, l'ensemble de départ de l'application P est $\mathscr{P}(\Omega)$, et non Ω car tout événement doit avoir une probabilité (pas seulement les événements élémentaires).

3.2 Premières propriétés

Propriétés de base d'une probabilité :
soit P une probabilité sur Ω, A et B des événements, alors,

1) $P(\emptyset) = 0$
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3) si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
4) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
5) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Quelques démonstrations :

1) Ω et $\emptyset$ sont des événements incompatibles
   donc $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$
   ainsi, $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$, donc $P(\emptyset) = 0$
2) A et $\bar{A}$ incompatibles
   donc $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
   or $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $P(\Omega) = 1$ donc $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, avec $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ qui sont incompatibles.

Propriété - formule du crible (ou de Poincaré) :
pour tous événements A et B,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple : avec un dé à 6 faces et les événements
A : « obtenir un nombre pair »
B : « obtenir un nombre inférieur 3 »
alors $P(A \cup B) = P(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = 5/6$ et
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/6 + 3/6 - P(\{2\}) = 5/6$

Remarque : pour tous événements A, B et C :
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
On obtient cette formule en appliquant 2 fois la formule du crible.

Lorsque les événements sont deux à deux incompatibles, la formule pour la probabilité d'une union est beaucoup plus simple.

Propriété - formule d'additivité : si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des événements deux à deux incompatibles (c'est-à-dire que pour $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$), alors : $$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$	Idée de démonstration : par récurrence avec la définition d'une probabilité. Exemple : toujours avec le dé, $P(\{1,2,3,4\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})$ car les événements élémentaires sont incompatibles donc $P(\{1,2,3,4\}) = 4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
Propriété - formule des probabilités totales (version classique) : si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B : $$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B)$$	Idée pour la démonstration : $B = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} (A_i \cap B)$ car $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est un système complet d'événements et les événements $A_i \cap B$ sont deux à deux incompatibles, on conclut en appliquant la proposition précédente.

Exemples : dans un jeu de 32 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), on tire au hasard une carte.
On s'intéresse à l'événement B : « on tire une petite carte » (7, 8, 9 ou 10).
Réaliser l'événement B correspond à tirer un 7, un 8, un 9 ou un 10 parmi une des quatre couleurs.
Pour l'écrire précisément, on va utiliser la famille (A_1, A_2, A_3, A_4), qui constitue un système complet d'événements, avec :

- A_1 : « on tire un cœur »
- A_2 : « on tire un carreau »
- A_3 : « on tire un trêfle »
- A_4 : « on tire un pique »

D'après la propriété précédente, $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$
i.e. la probabilité de B est la somme de la probabilité de tirer une petite carte de coeur, de la probabilité de tirer une petite carte de carreau, de la probabilité de tirer une petite carte de trêfle et de la probabilité de tirer une petite carte de pique.
or $P(B \cap A_1) = P(B \cap A_2) = P(B \cap A_3) = P(B \cap A_4) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ donc $P(B) = 4 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$

3.3 Evénements élémentaires

Propriété : soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, avec $\mathrm{card}(\Omega) = n$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p(\{\omega_i\}) = p_i$, alors $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$	Démonstration : cela découle de la formule d'additivité (les événéments sont incompatibles) : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\{\omega_i\})$ avec $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = 1$

Exemple : dans le cas d'équiprobabilité, cela nous permet de trouver la probabilité d'un événement élémentaire. Par exemple, on s'intéresse au lancer d'un dé équilibré à 6 faces : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
d'après la propriété, $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1$ or $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = p$
donc $6p = 1$ donc $p = \dfrac{1}{6} = P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$

3.4 Equiprobabilité - probabilité uniforme

Définition : on dit que l'on est en situation **d'équiprobabilité** lorsque les probabilités des événements élémentaires associés à l'expérience aléatoire sont toutes égales.	Remarque : autrement dit on a équiprobabilité lorsque chacun des résultats de l'expérience a la même chance d'être obtenu. Exemples classiques : lancers d'une pièce ou d'un dé (non truqués), tirages d'une carte dans un jeu ou d'une boule parmi n dans une urne...

Propriété : soit Ω, l'univers associé à une situation d'équiprobabilité, pour tout événement A (toute partie A de Ω) :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

On dit que la probabilité P est **uniforme** sur Ω

Remarque : la formule revient à dire que
$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Corollaire : soit Ω, l'univers associé à une situation d'équiprobabilité.

Tout événement élémentaire $\{\omega\}$ a pour probabilité :

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

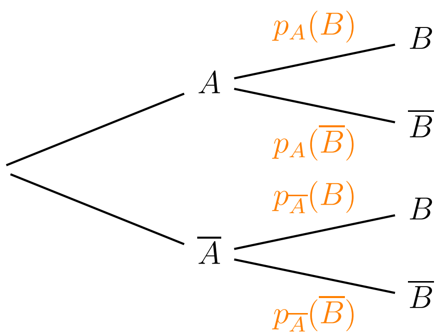
Exemples de situations d'équiprobabilité (ou pas) :

1. Lancer d'une pièce (équil.) : $P(\{F\}) = P(\{P\}) = 1/2$
2. Lancer d'un dé (équilibré) à 6 faces : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6$
3. Une urne contient 10 boules (indiscernables) et on en pioche une au hasard.
   Chaque boule a une probabilité d'être piochée de $1/10$
4. Une urne contient deux boules vertes et une boule rouge indiscernables au toucher et on en pioche une au hasard. Si on considère l'univers $\Omega = \{V, R\}$ alors ce n'est pas une situation d'équiprobabilité, en effet, il n'y a que deux issues possibles : on pioche soit une boule verte, soit une boule rouge; et $P(\{V\}) = 2/3$ et $P(\{R\}) = 1/3$
5. Si cette fois les deux boules vertes sont numérotées, l'univers peut s'écrire $\Omega = \{R, V_1, V_2\}$, et il s'agit alors d'une situation d'équiprobabilité (chaque résultat a une probabilité de $1/3$)
6. On tire une carte au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. L'univers Ω est l'ensemble des 32 différentes cartes du jeu. On a donc $\text{card}(\Omega) = 32$ et la probabilité de tirer une carte donnée est toujours de $1/32$

4 Probabilités conditionnelles

4.1 Définition, première propriété

La représentation par un arbre pondéré fait clairement apparaître le besoin de distinguer les probabilités associées à des branches secondaires (ou plus).
Cela va se traduire par la notion de probabilité conditionnelle : si on sait qu'un événement A est réalisé, quelle est la probabilité qu'un autre événement B soit réalisé ?
On peut aussi le voir comme une « sous-probabilité » : dans le « sous-univers » A, quelle est la probabilité que B soit réalisé ?



Définition : soit P une probabilité sur un univers Ω, et A un événement tel que $P(A) \neq 0$
pour tout événement B de Ω, on appelle **probabilité de B sachant A** et on note
$P_A(B)$ le nombre $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
On parle alors de **probabilité conditionnelle**.

Remarques :
- $P_A(B)$ désigne la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A est déjà réalisé.
- la définition entraine la propriété ci-dessous

Exemple : on lance deux dés (numérotés de 1 à 6).
Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit 6, sachant que le premier dé a donné un chiffre pair ?

$\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!] = [\![1, 6]\!]^2$. Un résultat est modélisé par un couple (a, b) avec a le résultat du premier dé, et b celui du deuxième. Notons les événements
- B : « la somme des deux chiffres obtenus vaut 6 »
- A_1 : « le premier dé donne un chiffre pair »

On cherche $P_{A_1}(B)$ qui vaut par définition $\dfrac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)}$

or $P(A_1) = \dfrac{1}{2}$ et $B \cap A_1$ est l'événement « la somme des deux chiffres obtenus vaut 6 et le dé numéro 1 donne un chiffre pair », donc $B \cap A_1 = \{(2, 4), (4, 2)\}$ et donc
$P(B \cap A_1) = \dfrac{\text{card}(B \cap A_1)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$ finalement $P_{A_1}(B) = \dfrac{1}{9}$

Propriété : soit A et B des événements de probabilités non nulles, alors : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$	Démonstration : étant donné que $A \cap B = B \cap A$ (A « et » B = B « et » A)

⚠ généralement $P_A(B) \neq P_B(A)$

4.2 Formule des probabilités totales

Propriété - formule des probabilités totales, version conditionnelle :

soit P une probabilité sur un univers Ω

Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est un système complet d'événements, avec chaque A_i de probabilité non nulle, alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Démonstration : la version classique de la formule des probabilités totales nous donne

$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i)$ et pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $P(B \cap A_i) = P_{A_i}(B)P(A_i)$

Exemple : un groupe d'amis souhaite passer la soirée dans l'une des trois discothèques valables de Biarritz. Dans la discothèque *Pipeline*, l'animateur passe 25% de reggae, dans la discothèque *Mundaka*, l'animateur en passe 40%, et dans la discothèque *JBay*, il en passe 30%.

Les amis choisissent une discothèque au hasard. Quelle est la probabilité qu'en y entrant, un titre de reggae soit diffusé ?

On considère les événements suivants :

- B_1 : « les amis sortent au *Pipeline* »
- B_2 : « les amis sortent au *Mundaka* »
- B_3 : « les amis sortent au *JBay* »
- R : « un titre de reggae est diffusé »

On connait $P_{B_1}(R)$, $P_{B_2}(R)$ et $P_{B_3}(R)$: $P_{B_1}(R) = \dfrac{25}{100}$, $P_{B_2}(R) = \dfrac{40}{100}$, et $P_{B_3}(R) = \dfrac{30}{100}$

Comme ils choisissent au hasard leur discothèque, on a $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$

D'après la formule des probabilités totales (version conditionnelle), on a donc :

$P(R) = P(B_1)P_{B_1}(R) + P(B_2)P_{B_2}(R) + P(B_3)P_{B_3}(R) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{30+40+25}{100}\right) = \dfrac{95}{300} = \dfrac{19}{60}$

On peut utiliser un arbre de probabilité pour illustrer cette formule.

On rappelle qu'un arbre vérifie toujours les propriétés suivantes :

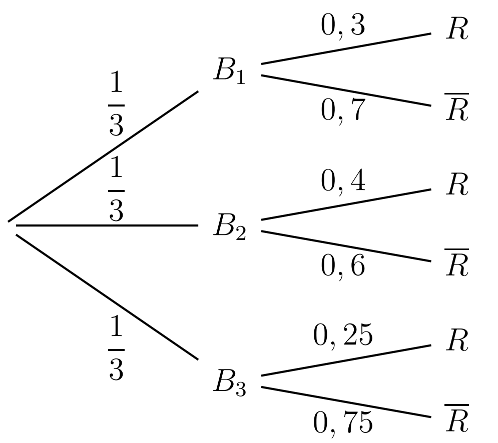
- la somme des probabilités des branches issues d'une même nœud vaut 1

  Par exemple ici

  $P(B_1)+P(B_2)+P(B_3) = 1$ et $P_{B_1}(R)+P_{B_1}(\bar{R}) = 1$
- la probabilité de l'événement représenté par un chemin est le produit des probabilités de ses branches. Par exemple ici,

  $$P(B_1 \cap R) = P(B_1)P_{B_1}(R)$$
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent (formule des probabilités totales). Par exemple ici :

$P(R) = P(B_1)P_{B_1}(R) + P(B_2)P_{B_2}(R) + P(B_3)P_{B_3}(R)$



4.3 Formule des probabilités composées

Introduction à la formule : soit A_1 et A_2 deux événements tels que $P(A_1) \neq 0$, nous avons vu que

$$P(A_1 \cap A_2) = P_{A_1}(A_2)P(A_1)$$

Si on considère de plus l'événement A_3 et si on suppose $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$,
avec la même formule, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P_{A_1 \cap A_2}(A_3)P(A_1 \cap A_2)$
d'où finalement : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$

Cette formule se généralise :

> Propriété - formule des probabilités composées :
>
> soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une famille d'événements telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \neq 0$, alors :
>
> $$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

Remarque : dit autrement, la probabilité d'un « chemin » est le produit des probabilités de toutes les branches qui le composent. C'est plus parlant avec des exemples (et en dessinant un arbre).

Exemples :

1. si on lance trois fois une pièce, la probabilité de faire « 3 fois pile » est :

$$P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = P(P_1)P_{P_1}(P_2)P_{P_1 \cap P_2}(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2. dans son tiroir, Agathe a 20 paires de chaussettes : 12 paires à pois, et 8 paires rayées. Trois jours consécutifs, elle choisit au hasard dans son tiroir une paire de chaussettes. Si la paire est à pois, elle la met, et si la paire est rayée, elle la met et la remplace dans le tiroir par une paire de chaussettes à pois. Quelle est la probabilité qu'Agathe porte des chaussettes rayées pendant les trois jours consécutifs ?

Pour $k \in [\![1, 3]\!]$, on note A_k l'événement : « Agathe porte des chaussettes rayées le jour k »
On cherche donc à calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, et d'après la formule (des probabilités composées) :
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$
Or $P(A_1) = \dfrac{8}{12+8}$, $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{7}{13+7}$ et $P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \dfrac{6}{14+6}$
donc $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{20^3} = \dfrac{21}{500}$

4.4 Formules de Bayes

Propriété - formule de Bayes : si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors $$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$	Exemple : retournons à Biarritz et calculons la probabilité pour que le groupe d'amis ait choisi la discothèque *Mundaka* sachant qu'en entrant un titre de reggae est diffusé. Il s'agit de calculer $P_R(B_2)$ et grâce à la formule de Bayes, $P_R(B_2) = \dfrac{P(B_2)P_{B_2}(R)}{P(R)}$ On trouve $P_R(B_2) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\frac{40}{100}}{\frac{95}{300}}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{120}{95} = \dfrac{40}{95} = \dfrac{8}{19}$

Remarques :

- comme nous l'avons vu plus haut, cette formule découle directement de la définition de la probabilité conditionnelle.
- la formule de Bayes sert à « remonter le temps. ». En effet, elle permet de calculer $P_B(A)$ avec A qui précède B au lieu de le suivre. Autrement dit : on cherche la probabilité d'une cause possible, connaissant le résultat de l'épreuve. Comme la probabilité qu'un patient soit réellement malade sachant qu'il a effectué un test positif.

5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux événements

On veut exprimer ici le fait que des paramètres peuvent avoir une influence entre eux (ou pas).

Par exemple, si on joue deux fois à pile ou face, on a une chance sur deux de faire face au deuxième lancer, indépendamment du premier. Ce que l'on peut écrire $P_{P_1}(F_2) = P_{F_1}(F_2) = P(F) = \dfrac{1}{2}$

Ce n'est pas toujours le cas, prenons un autre exemple :
Dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est de $0,52$
Par ailleurs, 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

De manière concrète, on comprend donc que cette luxation congénitale est dépendante du sexe (elle est plus fréquente chez les filles).On peut le démontrer de manière formelle avec les probabilités.

Si on note F (resp. G) l'événement « naissance d'une fille » (resp. d'un garçon) et L l'événement « avoir une luxation de la hanche », alors l'énoncé nous indique :
$P_F(L) = 0,02$ et $P_G(L) = 0,01$ donc $P_F(L) \neq P_G(L)$, ce qui illustre la dépendance luxation et sexe.

De plus, la formule des probabilités totales nous permet de calculer $P(L) = P(F)P_F(L) + P(G)P_G(L)$ donc $P(L) = 0,0148$
On concluera par exemple en disant $P_F(L) \neq P(L)$ donc les événements F et L sont dépendants.

Définition : on dit que deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, sont **indépendants** si $P(B) = P_A(B)$ ou $P(A) = P_B(A)$	Remarque : • autrement dit, la réalisation de A n'a pas d'influence sur la probabilité de B (ou réciproquement) • heureusement la définition est symétrique : $P(B) = P_A(B) \Leftrightarrow P(A) = P_B(A)$
Propriété : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	Remarque : dans la pratique, pour démontrer l'indépendance de deux événements, on utilisera donc au choix la définition (par exemple $P(A) = P_B(A)$) ou l'équivalence avec $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

5.2 Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

Définition : soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une famille d'événements. On dit que les événements $A_1, \dots, A_m$ sont **mutuellement indépendants** lorsque pour toute partie I de $[\![1, m]\!]$, $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$	Remarque : pour montrer que A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants, on doit vérifier que $\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$
Corollaire : si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Propriété : soit P une probabilité sur un univers Ω et $A_1, A_2, \dots, A_m$ des événements mutuellement indépendants. Si, pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, on pose au choix $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$, alors les événements $B_1, B_2, \dots, B_m$ sont mutuellement indépendants.	Remarques : • ⚠ la réciproque de ce corollaire est fausse (cf. exercice n°... sur les VTT-istes). • lorsqu'on répéte plusieurs fois de suite une même expérience aléatoire, les événements concernant les résultats des expériences successives sont mutuellement indépendants (par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé ou le tirage de boules dans une urne). Exemple d'application : voir l'exercice des n tirages avec 4 boules blanches et 6 boules noires.