Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ *Bon devoir !* Sans calculatrice

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) une suite arithmético-géométrique est toujours croissante

b) Pour $a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = a$

c) la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-2x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

e) $\deg(P-Q) = \deg(P) - \deg(Q)$

f) Si $A \subset B$ alors $P(A) \geqslant P(B)$

g) $1 = P(A) + P(\overline{A})$

h) si $P_A(B) = P_B(A)$ alors A et B sont indépendants

i) avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2), y = \dfrac{1}{2}$ admet deux antécédents par f

j) avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1+x^2, f\langle[-1;2]\rangle = [1,4]$

Exercice 2 - Python

On suppose que `L` contient une liste de 1000 nombres positifs

1. Ecrire un programme qui renvoie le minimum de la liste `L`
2. Ecrire un programme qui renvoie le premier rang d'apparition du nombre 100 s'il apparait dans la liste et qui renvoie -1 sinon.

Exercice 3 - somme

Pour a et b deux nombres réels, on note $\min(a,b)$ le minimum entre ces deux nombres, à savoir $\min(a,b)$ vaut a lorsque $a \leqslant b$ et b lorsque $a \geqslant b$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \min(5,k)$
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \min(7,k)$
3. Soit $n \geqslant 2$. Pour i un entier fixé tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on note :
$$u_n(i) = \sum_{k=1}^{n} \min(i,k)$$
   a. Montrer que $u_n(i) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right) i - \dfrac{i^2}{2}$

   b. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_n(i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. **a.** Pour $x \geqslant 0$, factoriser l'expression $f(x) - x$

   b. Montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) - x \geqslant 0$
2. **a.** Calculer u_1 et u_2

   b. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

   c. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$
3. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel , par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n,

   c. Retrouver l'expression de u_n, pour tout entier naturel n
4. Avec Python,

   a. Ecrire un programme qui créée une liste contenant les 100 premiers termes de la suite u, puis représente graphiquement la suite avec ces termes et sous la forme d'un nuage de points.

   b. On admet que la suite converge vers 1, déterminer le premier rang de la suite pour lequel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-5}$

Exercice 5 - la forêt

Une forêt se compose de trois types d'arbres :
- 30% sont des chênes ;
- 50% sont des peupliers ;
- 20% sont des hêtres.

Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres.

1. Au sein de cette forêt, quelle est la probabilité qu'un arbre (pris au hasard) soit touché par cette maladie ?
2. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ?
3. En se promenant dans la forêt, on se retrouve face à un arbre sain, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un peuplier ?
4. Les événements « un arbre de la forêt est touché par cette maladie » et « un arbre de la forêt est un peuplier » sont-ils indépendants ?
5. Pour faire le parquet de votre maison, vous avez besoin de trois arbres. Quelle est la probabilité que votre parquet soit composé de trois bois différents ? (les arbres sont pris parmi ceux qui sont touchés par la maladie et on suppose que les choix du premier puis du deuxième arbre ne changent pas les proportions).

Exercice 6 - tirages

On suppose que l'on dispose de deux urnes :
- $\mathscr{U}_R$ composée de deux balles rouges et deux balles bleues
- $\mathscr{U}_B$ composée d'une balle rouge et trois balles bleues

Le but de l'exercice est d'étudier deux jeux de tirage dans ces urnes, avec ou sans remise.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « on tire une balle rouge au $n^{\text{ième}}$ tirage » et B_n l'événement : « on tire une balle bleue au $n^{\text{ième}}$ tirage ».
Le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge ; puis le tirage numéro n s'effectuera dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage numéro $n-1$
On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles.

1. Dans cette question, on effectue une succession de tirages avec remise selon le protocole décrit au début de l'exercice.
   On note également, pour $n \in \mathbb{N}^*, r_n = P(R_n)$ et $b_n = P(B_n)$
   - **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $P(R_n) \neq 0$ puis $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$
   - **b.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $r_{n+1} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{4}$
   - **c.** En déduire le terme général de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
2. Dans cette question, on effectue trois tirages successifs sans remise selon le protocole décrit précédemment.
   - **a.** Justifier que $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{3}$ puis déterminer également $P_{B_1}(R_2)$
   - **b.** Calculer $P(R_2)$
   - **c.** Calculer $P_{R_2}(R_1)$
   - **d.** Que dire de l'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$?

Exercice 7

Soit a un nombre réel fixé. On considère le polynôme P défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

1. Donner le degré de P
2. Montrer que P admet une racine évidente.
3. En déduire P sous forme factorisée, et donner les racines de P
4. Donner, suivant les valeurs de a, le nombre de racines de P
5. Dans cette question, on suppose que $a = 3$
   - **a.** Résoudre l'inéquation $P(x) \leqslant 0$
   - **b.** En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $e^{2t} - 5e^t + 7 - 3e^{-t} \leqslant 0$

Exercice 8 - des fonctions polynomiales

On considère, pour tout entier n non nul, la fonction polynomiale f_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1+2x)^n - 2^n x^n$$

1. - **a.** Donner les formes développées des fonctions f_1, f_2, f_3
     Dans chacun des cas, déterminer leurs racines.
   - **b.** Développer la fonction f_4. Vérifier que f_4 s'annule en $-\dfrac{1}{4}$, puis en déduire les racines de f_4
2. - **a.** Donner la forme développée de la fonction f_n
   - **b.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de degré $n-1$ et déterminer son coefficient dominant.
3. - **a.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la dérivée de f_n est donnée par : $f_n'(x) = 2nf_{n-1}(x)$
   - **b.** Calculer, en fonction de la parité de n, $f_n\left(-\dfrac{1}{4}\right)$
   - **c.** Déduire des deux questions précédentes, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, « la fonction f_{2n} admet comme unique racine $-\dfrac{1}{4}$ et la fonction f_{2n+1} n'admet aucune racine ».