Corrigé *Total sur 61 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *5 points - 0,5 point par bonne réponse*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) une suite arithmético-géométrique est toujours croissante

Faux, par exemple la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ et $u_0 = 4$ (on peut le voir avec $u_1 = 3$ ce qui suffit à contredire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante).

b) Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = a$ Faux car $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$ (on sait que $\sqrt{a^2} = |a|$)

c) la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$

Vrai car le contenu de la racine est toujours positif ou nul, puisque $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ Vrai car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$ (d'après la formule du binôme de Newton)

e) $\deg(P - Q) = \deg(P) - \deg(Q)$ Faux, on peut s'en convaincre avec $P(x) = x$ et $Q(x) = 1$

f) Si $A \subset B$ alors $P(A) \geqslant P(B)$ Faux, c'est le contraire (cf. cours), $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

g) $1 = P(A) + P(\overline{A})$ Vrai, cf. cours

h) si $P_A(B) = P_B(A)$ alors A et B sont indépendants Faux, cf. cours

i) avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $y = \dfrac{1}{2}$ admet deux antécédents par f

Vrai, on peut résoudre l'équation ou étudier les variations (mais il faut les limites en $-\infty$ et $+\infty$, avec l'équation : $f(x) = \ln(1+x^2) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^2 = e^{\frac{1}{2}} - 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1}$ ou $x = \sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1}$

j) avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x^2$, $f\langle[-1;2]\rangle = [1,4]$

Faux car $f(2) = 5$, donc l'image directe ne peut être réduite à $[1,4]$)

Exercice 2 - Python *3 points*

On suppose que L contient une liste de 1 000 nombres positifs

1. Ecrire un programme qui renvoie le minimum de la liste L *1,5 points*

Comme vu en cours, on définit initialement le minimum comme la première valeur de la liste, puis on parcourt toute la liste et on met à jour le minimum dès que l'on rencontre une valeur strictement plus petite.

```
min=L[0]
for i in range(1,len(L)):
  if L[i]<min:
    min=L[i]
print(min)
```

2. Ecrire un programme qui renvoie le premier rang d'apparition du nombre 100 s'il apparait dans la liste et qui renvoie -1 sinon. *1,5 points*

Cette fois, on parcourt la liste, mais tant que l'on n'a pas rencontré la valeur 100, d'où l'usage d'une boucle `while`. Comme il est possible que l'on ne rencontre pas cette valeur, il faut rajouter une condition d'arrêt dans la boucle `while`, sinon dans ce cas, on testerait la 1 001ème valeur de la liste qui n'existe pas. Et il faut mettre cette condition en premier.

```
n=0
while n<1000 and L[n]!=100 :
  n=n+1
if n==1000 :
  print (-1)
else :
  print(n)
```

A la fin, si on trouve la valeur 1 000, c'est que la valeur 100 n'a pas été rencontrée, il faut donc rajouter une condition pour l'affichage.

Exercice 3 - somme *5,5 points*

Pour a et b deux nombres réels, on note $\min(a,b)$ le minimum entre ces deux nombres, à savoir $\min(a,b)$ vaut a lorsque $a \leqslant b$ et b lorsque $a \geqslant b$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \min(5,k)$ *1 point*

On remarque au préalable que pour $k \leqslant 5, \min(5,k) = k$ et pour $k > 5, \min(5,k) = 5$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \min(5,k) = \sum_{k=1}^{5} \min(5,k) + \sum_{k=6}^{9} \min(5,k)$ par relation de Chasles

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \min(5,k) = \sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=6}^{9} 5 = \frac{5 \times 6}{2} + 4 \times 5 = 35$ (on a reconnu la somme des entiers de 1 à 5 pour la première).

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \min(7,k)$ *1 point*

De manière analogue $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \min(7,k) = \sum_{k=1}^{7} \min(7,k) + \sum_{k=8}^{15} \min(7,k) = \sum_{k=1}^{7} k + \sum_{k=8}^{15} 7$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \min(7,k) = \frac{7 \times 8}{2} + 8 \times 7 = 84$

3. Soit $n \geqslant 2$. Pour i un entier fixé tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on note :

$\displaystyle u_n(i) = \sum_{k=1}^{n} \min(i,k)$

a. Montrer que $\displaystyle u_n(i) = \left(n + \frac{1}{2}\right) i - \frac{i^2}{2}$ *1,5 points*

Comme nous l'avons vu sur les premiers exemples, pour i fixé, tant que $k \leqslant i, \min(i,k) = k$ et pour $k > i, \min(i,k) = i$. On découpe donc à nouveau la somme à l'aide de la relation de Chasles :

$\displaystyle u_n(i) = \sum_{k=1}^{n} \min(i,k) = \sum_{k=1}^{i} \min(i,k) + \sum_{k=i+1}^{n} \min(i,k) = \sum_{k=1}^{i} k + \sum_{k=i+1}^{n} i$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} k = \frac{i(i+1)}{2}$ (somme d'entiers)

et $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} i = (n-(i+1)+1) \times i = (n-i) \times i$ (car i ne dépend pas de k)

donc $\displaystyle u_n(i) = \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i = \frac{i^2}{2} + \frac{i}{2} + ni - i^2 = n \times i + \frac{1}{2} \times i - \frac{i^2}{2}$ donc $\displaystyle u_n(i) = \left(n + \frac{1}{2}\right) i - \frac{i^2}{2}$

b. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_n(i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *2 points*

D'après le résultat précédent,

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_n(i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) i - \frac{i^2}{2}\right] = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2$ par linéarité

or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme d'entiers) et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme des carrés des entiers de 1 à n)

$$\begin{aligned}
\text{donc } \sum_{i=1}^{n} u_n(i) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) \\
&= n(n+1)(2n+1)\left(\frac{3}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Exercice 4 *15 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+2x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$

1. **a.** Pour $x\geqslant 0$, factoriser l'expression $f(x)-x$ *1 point*

Soit $x\geqslant 0$, alors par définition de f

$$f(x)-x=\frac{3x}{1+2x}-x=\frac{3x-x(1+2x)}{1+2x}=\frac{3x-x-2x^2}{1+2x}=\frac{2x-2x^2}{1+2x}=\frac{2x(1-x)}{1+2x}$$

b. Montrer que $\forall x\in[0;1], f(x)-x\geqslant 0$ *1 point*

Soit $x\in[0;1]$ alors $x\geqslant 0$ et donc $2x\geqslant 0$, de plus $x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant 1-x$ et enfin $1+2x\geqslant 0$
donc l'expression de $f(x)-x$ trouvée précédemment s'écrit comme un produit et quotient de termes positifs, donc $\forall x\in[0;1], f(x)-x\geqslant 0$

2. **a.** Calculer u_1 et u_2 *1 point*

Par définition de la suite $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$

de même $u_2=f(u_1)=f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{9\times 2}{2\times 2\times 5}=\dfrac{9}{10}$

b. Démontrer, par récurrence, que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 1$ *2 points*

On s'exécute, pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $P(n): 0\leqslant u_n\leqslant 1$

<u>Initialisation</u> : $u_0=\dfrac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

d'une part, par hypothèse $u_n\geqslant 0$ donc $3u_n\geqslant 0$ et $1+2u_n>0$ et donc $\dfrac{3u_n}{1+2u_n}\geqslant 0$ en tant que quotient de termes positifs i.e. $f(u_n)=u_{n+1}\geqslant 0$
d'autre part, par hypothèse à nouveau, $u_n\leqslant 1$ donc $u_n+2u_n\leqslant 1+2u_n$ i.e. $3u_n\leqslant 1+2u_n$
de plus $1+2u_n>0\Rightarrow\dfrac{1}{1+2u_n}>0$ donc $\dfrac{1}{1+2u_n}\times 3u_n\leqslant\dfrac{1}{1+2u_n}\times 1+2u_n$ et donc $\dfrac{3u_n}{1+2u_n}\leqslant 1$
i.e $f(u_n)=u_{n+1}\leqslant 1$ et donc finalement $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $0\leqslant u_n\leqslant 1$

c. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

D'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 1$ et d'après **1.b.**, $x\in[0;1]\Rightarrow f(x)-x\geqslant 0$
donc $\forall n\in\mathbb{N}, f(u_n)-u_n\geqslant 0$ i.e. $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}$ *2 points*

Encore par récurrence, pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $Q(n): u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}$

<u>Initialisation</u> : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow u_0=\dfrac{3^0}{3^0+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ ce qui est vrai, donc $Q(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $Q(n)$ est vraie

alors par définition de la suite $u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ et donc par hypothèse

$$u_{n+1}=\frac{3\times\frac{3^n}{3^n+1}}{1+2\times\frac{3^n}{3^n+1}}=\frac{\frac{3\times 3^n}{3^n+1}}{1+\frac{2\times 3^n}{3^n+1}}=\frac{\frac{3^{n+1}}{3^n+1}}{\frac{3^n+1+2\times 3^n}{3^n+1}}=\frac{\frac{3^{n+1}}{3^n+1}}{\frac{1+3\times 3^n}{3^n+1}}=\frac{\frac{3^{n+1}}{3^n+1}}{\frac{1+3^{n+1}}{3^n+1}}=\frac{3^{n+1}}{3^n+1}\times\frac{3^n+1}{1+3^{n+1}}=\frac{3^{n+1}}{1+3^{n+1}}$$

donc $Q(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, Q(n)$ est vraie, i.e. $u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}$

3. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel , par $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. *1,5 points*

Pour $n\in\mathbb{N}$, par définition des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ et alors

$$v_{n+1}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}=\frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}}=\frac{3u_n}{1+2u_n}\times\frac{1+2u_n}{1-u_n}=\frac{3u_n}{1-u_n}=3\times\frac{u_n}{1-u_n}=3v_n$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n *1 point*

Par propriété sur les suites géométriques, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 3^n$

or par définition $v_0 = \dfrac{u_n}{1-u_n} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \times 3^n = 3^n$

c. Retrouver l'expression de u_n, pour tout entier naturel n *1,5 points*

Dans un premier temps, on inverse la formule qui définit v_n (on peut aussi directement injecter son expression) : soit $n \in \mathbb{N}$ alors $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ et donc $v_n(1-u_n) = u_n$ puis $v_n - u_n v_n = u_n$

donc $u_n + u_n v_n = v_n$ et de fait $u_n(1+v_n) = v_n$ et enfin $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$ soit $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$ d'après l'expression de v_n trouvée à la question précédente (la division par $1+v_n$ était bien possible car $v_n = 3^n \Rightarrow 1+v_n \neq 0$)

4. Avec Python,

a. Ecrire un programme qui créée une liste contenant les 100 premiers termes de la suite u, puis représente graphiquement la suite avec ces termes et sous la forme d'un nuage de points. *1,5 points*

On définit d'abord la liste des termes avec la syntaxe incluant une boucle `for` dans la définition de la liste et en utilisant la formule explicite de la suite.

Puis pour la représenter un simple `plot(u)` suffit puisque les abscisses sont alors implicitement $0, 1, \ldots, 99$ (il faut bien sûr avoir chargé la librairie adéquate au préalable) et on ajoute le `+` pour obtenir le nuage de points.

```
import matplotlib.pyplot as plt
u=[3**n/(3**n+1) for n in range(0,100)]
plt.plot(u,'+')
plt.show()
```

b. On admet que la suite converge vers 1, déterminer le premier rang de la suite pour lequel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-5}$ *1,5 points*

On calcule de manière itérative les termes de la suite en utilisant la liste définie plus haut (sinon on remplace `u[n]` par `3**n/(3**n+1)`, et « tant que » la condition n'est pas atteinte. On va de fait utiliser une boucle `while` (on trouve 11 ici) :

```
import numpy as np
n=0
while np.abs (u[n]-1)>10**(-5) :
  n=n+1
print(n)
```

Exercice 5 - la forêt *6 points*

Une forêt se compose de trois types d'arbres :
- 30% sont des chênes ;
- 50% sont des peupliers ;
- 20% sont des hêtres.

Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres.

1. Au sein de cette forêt, quelle est la probabilité qu'un arbre (pris au hasard) soit touché par cette maladie ?

En notant M l'événement : « l'arbre est malade » et C, Pe et H les événements respectifs : « l'arbre est un chêne (resp. un peuplier, un hêtre)« , comme C, Pe et H forment un système complet d'événements, la formule des probabilités totales nous donne :

$P(M) = P(M \cap C) + P(M \cap H) + P(M \cap Pe) = P(C)P_C(M) + P(H)P_H(M) + P(Pe)P_{Pe}(M)$ *1,5 points*

donc $P(M) = 0,3 \times 0,1 + 0,5 \times 0,04 + 0,2 \times 0,25 = 0,03 + 0,02 + 0,05 = 0,1$ soit une chance sur 10

2. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? *1 point*

On cherche $P_M(C)$ et cette information ne nous est pas donnée directement donc on utilise la formule de Bayes :

$P_M(C) = \dfrac{P(C)P_C(M)}{P(M)} = \dfrac{0,3 \times 0,1}{0,1} = 0,3$ (en utilisant les données de l'énoncé et $P(M)$ calculé précédemment)

3. En se promenant dans la forêt, on se retrouve face à un arbre sain, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un peuplier ? *1 point*

De même, étant donné qu'un arbre sain est le contraire d'un arbre malade :

$P_{\overline{M}}(Pe) = \dfrac{P(Pe)P_{Pe}(\overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,5 \times 0,96}{0,9} = \dfrac{48}{90} = \dfrac{8}{15}$

car $P_{Pe}(\overline{M}) = 1 - P_{Pe}(M) = 1 - 0,04 = 0,96$ et $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,1 = 0,9$

4. Les événements « un arbre de la forêt est touché par cette maladie » et « un arbre de la forêt est un peuplier » sont-ils indépendants ? *0,5 point*

Concrètement on voit qu'il y a une dépendance : en proportion il y a moins de peupliers malades que d'arbres malades en général.

Mathématiquement on le justifie avec $P_{Pe}(M) \neq P(M)$, en effet $P_{Pe}(M) = 0,04$ et $P(M) = 0,1$

5. Pour faire le parquet de votre maison, vous avez besoin de trois arbres. Quelle est la probabilité que votre parquet soit composé de trois bois différents ? (les arbres sont pris parmi ceux qui sont touchés par la maladie). *2 points*

On s'intéresse donc au « tirage » de 3 arbres parmi les malades. On considère que les tirages sont mutuellement indépendants et ne modifient pas les probabilités (comme un tirage avec remise donc).
au sein de ces tirages, il y a $3! = 6$ façons de tirer 3 arbres différents (celles qui correspondent aux 6 branches qui donnent 3 arbres différents dans l'arbre de probabilités).
chacun de ces tirages a pour probabilité $P_M(C) \times P_M(Pe) \times P_M(H)$
donc la probabilité recherchée vaut $6 \times P_M(C) \times P_M(Pe) \times P_M(H)$ car ces 6 tirages sont incompatibles
comme à la question **2.**, on trouve
$P_M(Pe) = \dfrac{P(Pe)P_{Pe}(M)}{P(M)} = \dfrac{0,5 \times 0,04}{0,1} = 0,2$ et $P_M(H) = 1 - P_M(C) - P_M(Pe) = 1 - 0,3 - 0,2 = 0,5$
donc la probabilité recherchée vaut $6 \times 0,3 \times 0,2 \times 0,5 = 0,18$

Exercice 6 - tirages *8,5 points*

On suppose que l'on dispose de deux urnes :
- $\mathscr{U}_R$ composée de deux balles rouges et deux balles bleues
- $\mathscr{U}_B$ composée d'une balle rouge et trois balles bleues

Le but de l'exercice est d'étudier deux jeux de tirage dans ces urnes, avec ou sans remise.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « on tire une balle rouge au $n^{\text{ième}}$ tirage » et B_n l'événement : « on tire une balle bleue au $n^{\text{ième}}$ tirage ».
Le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge ; puis le tirage numéro n s'effectuera dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage numéro $n-1$
On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles.

1. Dans cette question, on effectue une succession de tirages avec remise selon le protocole décrit au début de l'exercice.
On note également, pour $n \in \mathbb{N}^*, r_n = P(R_n)$ et $b_n = P(B_n)$

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $P(R_n) \neq 0$ puis $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ *1 point*

Il s'agit d'un tirage avec remise, donc à chaque tirage et peu importe l'urne dans laquelle on l'effectue, il y a toujours au moins une balle rouge, donc $P(R_n) \neq 0$
par ailleurs, d'après les hypothèses de l'énoncé, si une boule rouge est tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage, alors le tirage suivant, i.e. le $n+1^{\text{ième}}$, s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}_R$ dans laquelle se trouvent deux balles rouges et deux balles bleues, chacune d'entre elle pouvant être tirée de manière équiprobable, ce qui s'écrit $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $r_{n+1} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{4}$ *1,5 points*

Il y a deux façons d'obtenir une balle rouge au $n+1^{\text{ième}}$ tirage, soit en ayant obtenu une balle rouge au tirage précédent, soit en ayant obtenu une balle bleue
autrement dit, d'après la propreté du cours $P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$
donc $P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ par définition des probabilités conditionnelles
or d'après la question précédente $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ et de même $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (dans ce dernier cas, c'est la probabilité d'avoir une balle rouge, sachant que l'on effectue le tirage dans $\mathscr{U}_B$ où se trouvent 1 balle rouge et 3 balles bleues)
donc $P(R_{n+1}) = P(R_n) \times \dfrac{1}{2} + P(\overline{R_n}) \times \dfrac{1}{4}$ i.e. $r_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n + \dfrac{1}{4}(1-r_n) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) r_n + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{4}$ avec la notation proposée par l'énoncé : $r_n = P(R_n)$, on a alors $r_{n+1} = P(R_{n+1})$ et car $P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n) = 1 - r_n$

c. En déduire le terme général de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *2 points*

Avec la relation trouvée, à la question précédente, on reconnait une suite arithmético-géométrique, on cherche dans un premier temps un point fixe :
$\alpha = \dfrac{1}{4}\alpha + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\alpha = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{3}$ et on introduit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = r_n - \dfrac{1}{3}$
soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition $v_{n+1} = r_{n+1} - \dfrac{1}{3}$
donc par définition de $r_n, v_{n+1} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{3}{12} - \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{4}r_n - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}\left(r_n - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}v_n$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} v_1 = \dfrac{1}{4^{n-1}} \times v_1$
or $v_1 = r_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ car par hypothèse $r_1 = \dfrac{1}{2}$ (car on tire dans l'urne $\mathscr{U}_R$ au premier tirage)

et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$v_n = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4^{n-1}} = \dfrac{1}{2 \times 4^{n-1}}$, or $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = v_n + \dfrac{1}{3}$ donc $r_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2 \times 4^{n-1}}\right)$
enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $B_n = \overline{R_n}$ alors $P(B_n) = 1 - P(R_n)$ i.e. $b_n = 1 - r_n$
donc $b_n = 1 - \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2 \times 4^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{3}\left(2 - \dfrac{1}{2 \times 4^{n-1}}\right)$

2. Dans cette question, on effectue trois tirages successifs sans remise selon le protocole décrit précédemment.

a. Justifier que $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{3}$ puis déterminer également $P_{B_1}(R_2)$ *1 point*

On cherche dans un premier temps la probabilité de tirer une balle rouge au deuxième tirage sachant qu'une balle rouge a été tirée au premier tirage
or ce premier tirage a été effectué dans l'urne $\mathscr{U}_R$ par hypothèse et il entraine d'une part que le second s'effectuera dans l'urne $\mathscr{U}_R$ et d'autre part que cette urne sera alors composée d'une balle rouge et de deux balles bleues (car la balle rouge tirée au premier tirage n'a pas été remise dans l'urne $\mathscr{U}_R$), donc le tirage de chacune des trois balles étant équiprobable, on trouve $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{3}$
et de manière analogue, $P_{B_1}(R_2) = \dfrac{1}{4}$ car si une balle bleue a été tirée au premier tirage (dans l'urne $\mathscr{U}_R$), on effectue le deuxième tirage dans l'urne $\mathscr{U}_B$ dont la composition n'a pas été modifiée (elle contient donc toujours une balle rouge et 3 balles bleues).

b. Calculer $P(R_2)$ *1,5 points*

Comme à la question **1.b.**, il y a deux façons d'obtenir une balle rouge au $2^{\text{ième}}$ tirage, soit en ayant obtenu une balle rouge au premier, soit en ayant obtenu une balle bleue. Autrement dit, d'après la proprété du cours : $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$ (car $\overline{R_1} = B_1$)
donc $P(R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_1) + P(B_1)P_{B_1}(R_2)$ par définition des probabilités conditionnelles
or $P(R_1) = P(B_1) = \dfrac{1}{2}$ (deux balles bleues et deux balles rouges dans l'urne $\mathscr{U}_R$ au début) et d'après la question précédente $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{B_1}(R_2) = \dfrac{1}{4}$ donc $P(R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{24} + \dfrac{3}{24} = \dfrac{7}{24}$

c. Calculer $P_{R_2}(R_1)$ *1 point*

Il s'agit ici « d'inverser le temps » (connaitre la probabilité d'avoir tiré une balle rouge en premier sachant qu'une balle rouge a été tirée au deuxième tirage), donc on utilise la formule de Bayes :
$P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1)P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{24}} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{24}{7} = \dfrac{6 \times 4}{6 \times 7} = \dfrac{4}{7}$ (toutes les probabilités étant connues avec les questions précédentes)

d. Que dire de l'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$? *0,5 point*

C'est l'événement impossible autrement dit $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0$, car tant qu'on effectue que des tirages de balles rouges on réalise les tirages dans l'urne $\mathscr{U}_R$ et comme les tirages sont sans remise, après deux tirages il n'y a plus de balle rouge dans l'urne $\mathscr{U}_R$. Autrement dit, avec la formule des probabilités composées :
$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1 \cap R_2}P(R_3) = 0$ car $P_{R_1 \cap R_2}P(R_3) = 0$

Exercice 7 *6 points*

Soit a un nombre réel fixé. On considère le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

1. Donner le degré de P *0,25 point*

P est de degré 3 car le terme de plus haut degré est x^3 quelle que soit la valeur de a

2. Montrer que P admet une racine évidente. *0,5 point*

Soit $a \in \mathbb{R}$, alors 1 est une racine évidente car $P(1) = 1^3 - (a+2) \times 1^2 + (2a+1) \times 1 - a = 1 - a - 2 + 2a + 1 - a = 0$ (là aussi, indépendamment de la valeur de a)

3. En déduire P sous forme factorisée, et donner les racines de P *2,5 points*

Comme 1 est une racine de P, on sait que P peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré donc $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$ où A, B et C sont des nombres réels
donc $(x-1)Q(x) = (x-1)(Ax^2+Bx+C) = Ax^3+Bx^2+Cx-(Ax^2+Bx+C) = Ax^3+(B-A)x^2+(C-B)x-C$
or $P(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$
donc par identification $A = 1$ puis $B - A = -(a+2) \Rightarrow B = -(a+2) + A = -a - 2 + 1 = -a - 1 = -(a+1)$ et enfin $-C = -a$ donc $C = 1$

de fait $Q(x)=x^2-(a+1)x+a$ or ce polynôme admet à nouveau 1 comme racine évidente, de fait (comme $A=1$) le produit des racines vaut a et sa deuxième racine vaut a
ce que l'on peut retrouver avec $(x-1)(x-a)=x^2-ax-x+a=x^2-(a+1)x+a$
finalement $Q(x)=(x-1)(x-a)$ et donc $P(x)=(x-1)Q(x)=(x-1)(x-1)(x-a)=(x-1)^2(x-a)$

4. Donner, suivant les valeurs de a, le nombre de racines de P *0,25 point*

D'après la question précédente, on sait que 1 et a sont les racines de P, de fait $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, P$ a 2 racines mais si $a=1$ alors P n'a qu'une seule racine (c'est 1 qui est alors « racine triple »)

5. Dans cette question, on suppose que $a=3$

a. Résoudre l'inéquation $P(x)\leqslant 0$ *1 point*

D'après la question **3.**, on sait qu'alors $P(x)=(x-1)^2(x-3)$
donc $(x-1)^2$ étant toujours positif où nul, $P(x)$ est du signe de $x-3$ et donc $P(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x-3\leqslant 0$
or $x-3\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 3$ donc $P(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 3$ i.e. $x\in]-\infty,3]$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $e^{2t}-5e^t+7-3e^{-t}\leqslant 0$ *1,5 points*

On voit le lien avec le polynôme, mais pour le rendre encore plus clair au niveau des puissances des exponentielles, on va multiplier l'équation par e^t
soit $t\in\mathbb{R}$, on note I l'inéquation, alors
$I\Leftrightarrow e^{2t}-5e^t+7-3e^{-t}\leqslant 0\Leftrightarrow e^t(e^{2t}-5e^t+7-3e^{-t})\leqslant e^t\times 0$ car $e^t>0$ (pour tout réel t)
donc $I\Leftrightarrow e^{3t}-5e^{2t}+7e^t-3\leqslant 0\Leftrightarrow P(e^t)\leqslant 0$ (car $e^te^{-t}=e^{t-t}=e^0=1$)
or d'après la question précédente, $P(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 3$ donc $P(e^t)\leqslant 0\Leftrightarrow e^t\leqslant 3$ et donc $P(e^t)\leqslant 0\Leftrightarrow \ln(e^t)\leqslant\ln(3)$ car la fonction ln est croissante ainsi que l'exponentielle (pour l'équivalence)
finalement $I\Leftrightarrow \ln(e^t)\leqslant\ln(3)\Leftrightarrow t\leqslant\ln(3)$ (car $\ln(e^t)=t$ pour tout réel t) donc $\mathscr{S}=]-\infty,\ln(3)]$

Exercice 8 - des fonctions polynomiales *12 points*

On considère, pour tout entier n non nul, la fonction polynomiale f_n définie par : $\forall x\in\mathbb{R}, f_n(x)=(1+2x)^n-2^nx^n$

1. a. Donner les formes développées des fonctions f_1, f_2, f_3. Dans chacun des cas, déterminer leurs racines.

$f_1(x)=(1+2x)^1-2^1x^1=1+2x-2x=1$ donc f_1 n'admet pas de racines *2 points*
$f_2(x)=(1+2x)^2-2^2x^2=1+4x+4x^2-4x^2=1+4x$ donc f_2 admet pour unique racine $-\dfrac{1}{4}$
Et en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :
$f_3(x)=(1+2x)^3-2^3x^3=1+3\times 2x+3\times(2x)^2+(2x)^3-8x^3=1+6x+12x^2$
On en déduit que f_3 n'admet pas de racines ($\Delta=6^2-4\times1\times12=-12$)

b. Développer la fonction f_4. Vérifier que f_4 s'annule en $-\dfrac{1}{4}$, puis en déduire les racines de f_4 *3 points*

De nouveau avec la formule du binôme de Newton (et sachant que $\dbinom{4}{2}=6$), on obtient :
$f_4(x)=(1+2x)^4-2^4x^4=1+4\times2x+6\times(2x)^2+4(2x)^3+(2x)^4-16x^4=1+8x+24x^2+32x^3$
Le calcul ci-dessous est possible avec les deux formes de f_4, on utilise ici celle donnée par l'énoncé (plutôt que la forme développée juste au-dessus).
On trouve $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\left(1+2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)^4-2^4\left(-\dfrac{1}{4}\right)^4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-\dfrac{2^4}{4^4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=0$
Or, f_4 est un polynôme de degré 3, on en déduit que f_4 peut s'écrire sous la forme :
$f_4(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2
En écrivant $Q(x)=ax^2+bx+c$ où a,b,c sont des réels, on obtient :
$f_4(x)=ax^3+bx^2+cx+\dfrac{1}{4}ax^2+\dfrac{1}{4}bx+\dfrac{1}{4}c=ax^3+\left(b+\dfrac{1}{4}a\right)x^2+\left(c+\dfrac{1}{4}b\right)x+\dfrac{1}{4}c$
donc en identifiant les coefficients avec la forme développée de f_4 obtenue plus haut, on trouve :
$a=32 \quad b+\dfrac{1}{4}a=24 \quad c+\dfrac{1}{4}b=8 \quad \dfrac{1}{4}c=1$ et donc $a=32 \quad b=16 \quad c=4$
puis en remarquant que le discriminant de $Q(x)$ est strictement négatif ($\Delta=16^2-4\times32\times4=16^2(1-2)=-16^2$) on en déduit que Q n'a pas de racine et donc que f_4 n'a pas de racine supplémentaire. f_4 n'admet donc que $-\dfrac{1}{4}$ comme racine.

2. a. Donner la forme développée de la fonction f_n *1,5 points*

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$ alors d'après la formule du binôme de Newton,
$$(1+2x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(2x)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kx^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^kx^k+\binom{n}{n}2^nx^n$$

d'après la relation de Chasles (possible car $n \geqslant 1 \Rightarrow n-1 \geqslant 0$)

donc $(1+2x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k x^k + 2^n x^n$ car $\binom{n}{n} = 1$

et donc $f_n(x) = (1+2x)^n - 2^n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k x^k + 2^n x^n - 2^n x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k x^k$

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de degré $n-1$ et déterminer son coefficient dominant. *0,5 point*

Avec l'expression de la question précédente, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k x^k$, on trouve que le terme de plus haut degré est $\binom{n}{n-1} 2^{n-1} x^{n-1}$ (dernier terme de la somme pour $k = n-1$)

donc f_n est bien de degré $n-1$ et son coefficient dominant est $n2^{n-1}$ (car $\binom{n}{n-1} = n$)

3. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la dérivée de f_n est donnée par : $f_n'(x) = 2nf_{n-1}(x)$ *1 point*

Ici encore plusieurs options sont possibles pour la dérivation, et la forme initiale est de nouveau pratique (en utilisant notamment la dérivée de u^n qui est $nu'u^{n-1}$) :
$f_n'(x) = n \times 2 \times (1+2x)^{n-1} - 2^n \times n \times x^{n-1} = 2n[(1+2x)^{n-1} - 2^{n-1}x^{n-1}] = 2nf_{n-1}(x)$

b. Calculer, en fonction de la parité de n, $f_n\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ *1,5 points*

Toujours avec la forme initiale : $f_n\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \left(1 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)^n - 2^n\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - \left(-\dfrac{2}{4}\right)^n$

donc $f_n\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{(-1)^n}{2^n} = \dfrac{1-(-1)^n}{2^n}$

de fait si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et donc $f_n\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$

et si n est impair alors $(-1)^n = -1$ et donc $f_n\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

c. Déduire des deux questions précédentes, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, « la fonction f_{2n} admet comme unique racine $-\dfrac{1}{4}$ et la fonction f_{2n+1} n'admet aucune racine ». *2,5 points*

L'hypothèse de récurrence nous est donnée, on peut la rappeler (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$P(n)$: « f_{2n} admet comme unique racine $-\dfrac{1}{4}$ et f_{2n+1} n'admet aucune racine »

<u>Initialisation</u> : on commence avec $n = 1$

$P(1)$ s'écrit « f_2 admet comme unique racine $-\dfrac{1}{4}$ et f_3 n'admet aucune racine », ce qui est le cas comme nous l'avons vu plus haut.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$, supposons que $P(n)$ est vérifiée.
D'après **3.**a), $f_{2n+2}'(x) = 2(2n+2)f_{2n+1}(x)$

or par hypothèse de récurrence f_{2n+1} n'admet aucune racine et d'après la question précédente $f_{2n+1}\left(-\dfrac{1}{4}\right) > 0$, de plus f_{2n+1} est continue, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_{2n+1}(x) > 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_{2n+2}'(x) > 0$ et de fait f_{2n+2} est strictement croissante.

or d'après **3.**b) $f_{2n+2}\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$ donc $\forall x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{4}\right[, f_{2n+2}(x) < 0$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[, f_{2n+2}(x) > 0$

au passage, nous en déduisons que $-\dfrac{1}{4}$ est l'unique racine de f_{2n+2}
de plus, $f_{2n+3}'(x) = 2(2n+3)f_{2n+2}(x)$, donc f_{2n+3}' est de même signe que f_{2n+2} de fait f_{2n+3} est décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{4}\right[$ et croissante sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$

or d'après **3.**b) $f_{2n+3}\left(-\dfrac{1}{4}\right) > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_{2n+3}(x) > 0$ et donc f_{2n+3} n'admet pas de racine.
D'où la validation de $P(n+1)$ (qui inclut donc f_{2n+2} et f_{2n+3}). De fait par théorème de récurrence, $\forall n \geqslant 1, P(n)$ est vraie.
Pour y voir plus clair, on peut résumer la situation dans un tableau (de signes et variations) :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
$f_{2n+1}(x)$		+		+	
$f_{2n+2}'(x)$		+		+	
f_{2n+2}		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f_{2n+2}(x)$		-	0	+	
$f_{2n+3}'(x)$		-	0	+	
f_{2n+3}		$\searrow$	2^{1-n}	$\nearrow$	