

Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Image directe	1, 2, 3, 4	
Injectivité, bijectivité, surjectivité	1, 5, 6, 7, 8, 9 + D.L. n°5	10
Composition	1, 2, 5, 7, 8	10
Trouver la réciproque	9	10

Application, composition, image directe

Exercice 1

On considère les deux applications f et g de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ dans lui-même définies par leur tableau de valeurs.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	4	2	1	6	5

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	2	3	4	6	5

- Déterminer $g \circ g$
- Déterminer $f \circ f$
- Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$
- Déterminer $f\langle A \rangle$ avec $A = \{1, 5\}$
- Déterminer $g\langle B \rangle$ avec $B = \{5, 6\}$
- Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 2

Soit f et g les deux applications suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x + 6$$

- L'égalité $f \circ g = g \circ f$ est-elle vérifiée ?
- Tracer les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g
- Déterminer graphiquement $f\langle] - 3, 1 \rangle$ et $g\langle [-1, 1] \rangle$

Exercice 3

Soit f l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

- Déterminer, dans les cas suivants, si le réel y admet des antécédents par f , et si oui, les déterminer.
 - $y = 0$
 - $y = 2$
 - $y = 1$
 - $y = \frac{1}{2}$
- Dresser le tableau de variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative \mathcal{C}_f
Retrouver graphiquement les résultats de la question 1
- Déterminer graphiquement $f\langle [-1, 1] \rangle$ et $f\langle [0, 2] \rangle$ et $f\langle [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}] \rangle$

Exercice 4

Calculer les images directes suivantes :

- $f\langle [-1, 4] \rangle$ avec $f(x) = x^2 - x - 6$
- $g\langle [-5, 7] \rangle$ avec $g(x) = |x - 1|$
- $h\langle [-3, 5; 10] \rangle$ avec $h(x) = \lfloor x \rfloor$
- $i\langle \mathbb{R}_+^* \rangle$ avec $i(x) = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^+)$

Injection, surjection, bijection

Exercice 5

On considère les deux applications f et g de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ dans lui-même définies par leur tableau de valeurs.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	1	2	6	4	3

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	4	2	3	4	6	5

f et g sont-elles des bijections de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ dans lui-même ? Si oui, déterminer f^{-1} , g^{-1}

Exercice 6

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacune des applications f suivantes :

1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n+2$

3. $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

5. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

2. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto n+2$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto |x+1|$

6. $f: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$
 $n \mapsto (-1)^n$

Exercice 7

Soient $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} \frac{y}{2} & \text{si } y \text{ est pair} \\ \frac{y-1}{2} & \text{si } y \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

- Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g
- Préciser $g \circ f$. Est-elle injective, surjective, bijective ? De même pour $f \circ g$

Exercice 8

Soit f l'application définie, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) \neq -1$
- Déterminer l'application $f \circ f$
- En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et préciser sa bijection réciproque

Exercice 9

Dans chaque cas, démontrer que l'application f est une bijection, et déterminer sa réciproque.

1. $f: \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(2x+1) - 1$

2. $f: \mathbb{R} \setminus \{-4\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $x \mapsto \frac{x+3}{x+4}$

Exercice 10

On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x+2y, -x+3y) \quad \text{et} \quad (a, b) \mapsto \left(\frac{3a-2b}{5}, \frac{a+b}{5} \right)$$

Montrer que f est une bijection entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^2 et que g est la réciproque de f