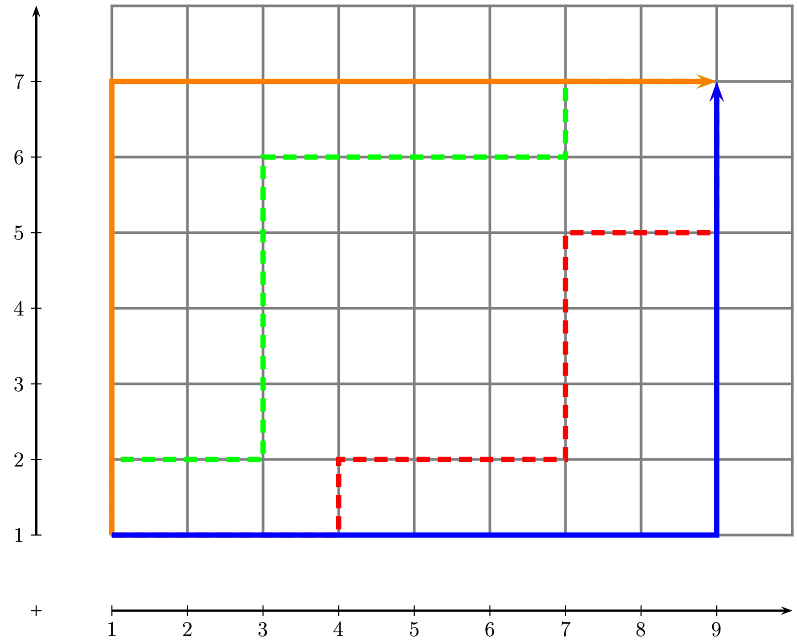
Corrigé *Total sur 29 points*

Exercice 1 *6 points*

Le centre d'une ville des Etats-Unis comprend 10 rues toutes orientées Sud-Nord numérotées de 1 à 10 ; la rue la plus à l'ouest portant le numéro 1.
Elle comprend également 8 avenues perpendiculaires, toutes orientées ouest-est et numérotées de 1 à 8 ; la plus au sud portant le numéro 1.
Bob habite au carrefour First Street et First Avenue ; son école se trouve au carrefour Nineth Street et Seventh Avenue ; pour aller à l'école, il ne se dirige que vers l'est et le nord.
La calculatrice est (presque) nécessaire pour certaines questions.

1. Faire un schéma. *1,5 points*

   Pour le schéma (et pour les explications), on fait comme si l'espacement entre les rues était régulier.
   Un arbre peut aussi donner une représentation intéressante, à chaque carrefour (tant qu'il n'est pas arrivé sur un bord), Bob a deux choix : est ou nord.
   Quatre chemins sont proposés ci-contre.



2. Quel est le nombre de chemins parmi lesquels Bob peut choisir son itinéraire chaque matin.

   Comme l'illustre le schéma, deux possibilités s'offrent à nous à chaque carrefour (jusqu'à être obligé d'aller à l'est ou au nord). On voit aussi qu'il faut nécessairement choisir 8 unités vers l'est et 6 vers le nord pour arriver à destination.
   On peut donner quelques exemples de chemins :
   $\{e, e, e, e, e, e, e, e, n, n, n, n, n, n\}$ $\{e, n, n, e, n, e, n, e, e, n, e, e, n, e\}$
   $\{n, e, n, n, e, e, n, e, e, e, n, e, n, e\}$ $\{n, n, n, n, n, n, e, e, e, e, e, e, e, e\}$
   Finalement la question qui se pose est de choisir les 6 endroits où placer une unité vers le nord, sachant qu'il y a 14 unités à effectuer au total.
   donc le résultat est $\binom{14}{6} = 3\,003$
   On aurait pu le voir comme le choix des 8 endroits où placer une unité vers l'est sur les 14, ce qui donnerait $\binom{14}{8}$, mais heureusement $\binom{14}{6} = \binom{14}{14-6} = \binom{14}{8}$ *1,5 points*

3. Au carrefour de Fourth Street et Fourth Avenue, il y a un marchand de glaces : combien y a-t-il de chemins pour aller à l'école qui permettent à Bob de manger une glace ? *1,5 points*

   Le point de passage découpe notre chemin en deux chemins intermédiaires et donc deux questions qui sont analogues à la précédente.
   Pour aller jusqu'au marchand de glaces, il faut placer 3 unités vers l'est et 3 vers le nord (sur 6), le nombre de possibilités est donc $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 20$
   Puis de manière analogue pour aller du marchand de glace jusqu'à l'école, il reste 5 unités à faire vers l'est et 3 vers le nord, on obtient donc $\binom{8}{3} = 56$ possibilités.

Mais pour chacun des chemins jusqu'au marchand de glace, on peut utiliser n'importe lequel du marchand jusqu'à l'école.
Donc finalement on obtient $20 \times 56 = 1\,120$ possibilités.

4. John, un ami de Bob, habite sur la Third Avenue, à mi-chemin entre la Sixth Street et la Seventh Street ; combien y a-t-il de chemins permettant à Bob de passer chez John et de finir la route avec lui ? *1,5 points*

Pour répondre à la condition, Bob doit d'abord faire 2 unités vers le nord et 5 vers l'est (peu importe l'ordre) puis il fait nécessairement une unité vers l'est. Il reste alors 4 unités vers le nord et 2 unités vers l'est à faire.
Donc il a $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$ choix avant de retrouver John puis un passage obligé et enfin $\binom{6}{4} = 15$ choix pour finir.
Donc au total $21 \times 15 = 315$ chemins.

Exercice 2 - des fonctions polynomiales *6 points*

On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Factoriser le polynome P au maximum. *2,5 points*

P admet 1 comme racine évidente puisque $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$
donc P est factorisable par $(x - 1)$
i.e. $\exists Q \in \mathbb{R}[X], P(x) = (x-1)Q(x)$ où $\deg Q = 2$, on pose donc $Q(x) = ax^2 + bx + c$
alors $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
or $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ donc par identification $a = 1$ puis $b - a = -6 \Rightarrow b = -6 + a = -5$ puis $-c = -6$ donc $c = 6$
d'où $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ et donc $P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$
on va alors chercher à factoriser $Q(x)$, en remarquant que 2 est une racine évidente de $Q(x)$, donc comme $a = 1$, l'autre racine est 3 et donc $Q(x) = (x-2)(x-3)$ (ce que l'on peut aisément vérifier en développant)
finalement $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

Nota bene : si on trouve d'emblée deux racines évidentes (1 et 2 par exemple), on peut « doublement » factoriser et il ne reste alors plus qu'un polynôme de degré 1 à déterminer.

2. Résoudre l'équation $e^{2x} - 6e^x + 11 - 6e^{-x} = 0$ *1,5 points*

On remarque d'abord que pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 6e^x + 11 - 6e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$ (l'équation reste équivalente en multipliant par e^x car e^x est non nul)
donc $e^{2x} - 6e^x + 11 - 6e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow P(e^x) = 0$
or d'après **1.** $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$
donc $P(e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = 2$ ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln(2)$ ou $x = \ln(3)$
finalement $\mathscr{S} = \{0, \ln(2), \ln(3)\}$

3. Résoudre l'inéquation $(\ln(x))^3 - 6(\ln(x))^2 + 11\ln(x) - 6 > 0$ *2 points*

On va commencer par étudier le signe de P grâce à la forme factorisée trouvée en **1.** et sachant que $x - \alpha \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \alpha$, on peut établir le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-	0	+		+	
$x-3$		-		-		-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

alors $(\ln(x))^3 - 6(\ln(x))^2 + 11\ln(x) - 6 > 0 \Leftrightarrow P(\ln(x)) > 0$
or d'après le tableau $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1;2[$ ou $x \in]3, +\infty[$
donc $P(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow 1 < \ln(x) < 2$ ou $3 < \ln(x) \Leftrightarrow e < x < e^2$ ou $e^3 < x$
car les fonctions exponentielles et logarithme (pour le sens retour) sont strictement croissantes
finalement $\mathscr{S} = \left]e, e^2\right[\cup \left]e^3, +\infty\right[$

Exercice 3 *17 points*

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

Soit u la suite de terme général u_n, définie par son premier terme $u_0 = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$ par la relation suivante : $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$

1. Avec Python,

a. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie u_n *1,5 points*

Il y a deux options, soit au sein de la fonction, on intègre une boucle *for* qui permet de calculer les termes de manière itérative jusqu'au rang souhaité. Soit on créée une fonction « récursive » (i.e. qui s'appelle elle-même) de manière analogue à la définition de la suite.

```
def u(n):
  u=0
  for i in range(1,n+1):
    u=(3*u+2)/(u+4)
  return u
```

```
def u(n):
  if n==0 :
    return 0
  else :
    return (3*u(n-1)+2)
    /(u(n-1)+4)
```

b. Ecrire un programme qui créée une liste contenant les 100 premiers termes de la suite u, puis représente graphiquement la suite avec ces termes et sous la forme d'un nuage de points. *2 points*

On définit d'abord la liste des termes avec la syntaxe incluant une boucle `for` dans la définition de la liste et la fonction définie au **1.a)**. Puis pour la représenter un simple `plot(u)` suffit puisque les abscisses sont alors implicitement $0, 1, \dots, 99$ (il faut bien sûr avoir chargé la librairie adéquate au préalable) et on ajoute le `+` pour obtenir le nuage de points.

programme modifié (deuxième ligne)

```
import matplotlib.pyplot as plt
u=[u(n) for n in range(0,100)]
plt.plot(u,'+')
plt.show()
```

c. Emettre une conjecture sur la convergence de la suite. *0,5 point*

Le calcul des 100 premiers termes et la représentation graphique (avec Python) nous incitent à penser que la suite u converge vers 1, ce qui est le cas. En fait, dans l'expression de u_n que l'on trouve à la question **10.**, le terme 5^n prend le dessus sur l'autre terme à la fois au numérateur et au dénominateur, ce qui fait que u_n est rapidement proche de $\dfrac{5^n}{5^n} = 1$

d. En notant ℓ la limite de la suite, déterminer le premier rang de la suite pour lequel $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-5}$ *1,5 points*

On utilise la conjecture de la question précédente, on prend donc $\ell = 1$, et on calcule de manière itérative les termes de la suite en utilisant la fonction définie plus haut, et « tant que » la condition n'est pas atteinte. On va de fait utiliser une boucle `while` (et on trouve 14) :

```
import numpy as np
n=0
while np.abs (u(n)-1)>10**(-5) :
  n=n+1
print(n)
```

2. Calculer u_1 et u_2 *0,75 point*

Par définition $u_1 = \dfrac{3u_0+1}{u_0+4} = \dfrac{1}{2}$ car $u_0 = 0$ et de fait $u_2 = \dfrac{3u_1+2}{u_1+4} = \dfrac{3 \times \frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2}+4} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} = \dfrac{7}{9}$

3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$ *1,25 points*

Il s'agit d'une récurrence « immédiate » puisque le calcul des termes de la suite ne fait qu'intervenir des termes positifs (addition, produit et quotient) : pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: $u_n \geqslant 0$

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

par hypothèse $u_n \geqslant 0$ donc $3u_n + 2 \geqslant 0$ et $u_n + 4 > 0$ et donc $\dfrac{3u_n+2}{u_n+4} \geqslant 0$ en tant que quotient de termes positifs, i.e. $u_{n+1} \geqslant 0$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \geqslant 0$

4. Pour $x \geqslant 0$, factoriser l'expression $f(x) - x$ *1,25 points*

Soit $x \geqslant 0$, $f(x) - x = \dfrac{3x+2}{x+4} - x = \dfrac{3x+2-x(x+4)}{x+4} = \dfrac{3x+2-x^2-4x}{x+4} = \dfrac{-x^2-x+2}{x+4}$
or $-x^2 - x + 2$ admet 1 comme racine évidente et de fait -2 comme deuxième racine
donc $-x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2)$ et donc $f(x) - x = \dfrac{-(x-1)(x+2)}{x+4}$

5. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x réelle. *0,75 point*

Soit $x \geqslant 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(x-1)(x+2)}{x+4} \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$ donc $\mathscr{S} = \{1\}$ car $x \geqslant 0$

6. Montrer que $\forall x \in [0;1], f(x) - x \geqslant 0$ *1 point*

Soit $x \in [0;1]$, alors $x \leqslant 1 \Rightarrow x - 1 \leqslant 0$, de plus $x + 2 \geqslant 0$ et $x + 4 \geqslant 0$
donc $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+4} \leqslant 0$ donc $\dfrac{-(x-1)(x+2)}{x+4} \geqslant 0$ i.e. $f(x) - x \geqslant 0$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}$ *1 point*

On peut partir du résultat ou écrire que pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4} = \frac{3u_n+12-10}{u_n+4} = \frac{3u_n+12}{u_n+4} - \frac{10}{u_n+4} = \frac{3(u_n+4)}{u_n+4} - \frac{10}{u_n+4} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$$

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$ *2 points*

A nouveau par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n \leqslant 1$

Initialisation : $u_0 = 0 \leqslant 1$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

alors par hypothèse $u_n \leqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \leqslant 5$ et donc $\dfrac{1}{u_n+4} \geqslant \dfrac{1}{5}$ car, $u_n + 4 > 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$
donc $\dfrac{10}{u_n+4} \geqslant \dfrac{10}{5}$ i.e. $\dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 2$ puis $-\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2$ et enfin $3 - \dfrac{10}{u_n+4} \leqslant 3 - 2$
i.e. $u_{n+1} \leqslant 1$ d'après la question précédente donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \leqslant 1$

9. Déduire des questions précédentes les variations de la suite u *1 point*

D'après la question précédente et la question **2.**, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$
et d'après **5.**, $x \in [0;1] \Rightarrow f(x) - x \geqslant 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \geqslant 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite u est croissante.

10. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^{n-1}}$ *2,5 points*

Une dernière pour la route, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^{n-1}}$

Initialisation : d'une part $\dfrac{5^0 - 2^0}{5^0 + 2^{0-1}} = \dfrac{1-1}{1+2^{-1}} = \dfrac{0}{1+2^{-1}} = 0$, d'autre part $u_0 = 0$ donc $P(0)$ vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par définition de la suite u, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$ et par hypothèse de récurrence $u_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^{n-1}}$
$$\text{donc } u_{n+1} = \frac{3\frac{5^n-2^n}{5^n+2^{n-1}} + 2}{\frac{5^n-2^n}{5^n+2^{n-1}} + 4} = \frac{\frac{3(5^n-2^n)+2(5^n+2^{n-1})}{5^n+2^{n-1}}}{\frac{5^n-2^n+4(5^n+2^{n-1})}{5^n+2^{n-1}}} = \frac{3(5^n-2^n)+2(5^n+2^{n-1})}{5^n+2^{n-1}} \times \frac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n+4(5^n+2^{n-1})}$$
$$= \frac{3(5^n-2^n)+2(5^n+2^{n-1})}{5^n-2^n+4(5^n+2^{n-1})} = \frac{(3+2)\times 5^n - 3\times 2^n + 2\times 2^{n-1}}{(1+4)5^n - 2^n + 4\times 2^{n-1}} = \frac{5\times 5^n - 3\times 2^n + 2^n}{5\times 5^n - 2^n + 2^2\times 2^{n-1}}$$
$$= \frac{5\times 5^n - 3\times 2^n + 2^n}{5\times 5^n - 2^n + 2\times 2\times 2^{n-1}} = \frac{5^{n+1} - 2\times 2^n}{5^{n+1} - 2^n + 2\times 2^n} \text{ donc } u_{n+1} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{5^{n+1} + 2^n}$$
i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.