Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ *Bon devoir !* Sans calculatrice

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$

b) $x\mapsto \ln(x-1)$ est définie sur $]0;+\infty[$

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie de manière récursive par $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$
alors f est croissante $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

d) $\binom{23}{16}=\binom{23}{7}$

e) $(a+b)^n=(a-b)^n$

f) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

h) $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

i) Le polynôme P défini par $P(x)=(x+1)(x-7)(3+7x^2)$ peut être encore factorisé.

j) $P(A\cap B)=P(A)P_B(A)$

Exercice 2 - un polynôme à scinder

Soit P le polynôme définie par $P(x)=x^3+6x^2+5x-12$

1. Factoriser P au maximum.

2. Etudier le signe de P

3. Résoudre l'inéquation $(\ln(x))^3+6(\ln(x))^2+5\ln(x)-12\geqslant 0$

4. Résoudre l'équation $e^{-3x}+6e^{-2x}+5e^{-x}-12=0$

Exercice 3 - suite implicite

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, f_n(x)=x^n+9x^2-4$$

1. **a.** Dresser le tableau de variations de f_n

b. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=0$ n'a qu'une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera u_n cette solution.
Indication : on pourra raisonner en utilisant les valeurs de la fonction f_n et sa continuité.

c. Calculer u_1 et u_2

d. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in\,]0;1[$
*Même indication qu'à la question **b.***

2. **a.** Montrer que $\forall x\in]0;1[, f_{n+1}(x)<f_n(x)$

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 4 - réveil difficile

Coralie est étudiante en classe préparatoire et un matin sur quatre elle se lève en retard.
Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre son vélo pour se rendre au lycée. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit deux fois sur cinq d'aller à pied et le reste du temps elle se rend au lycée à vélo.
On considère un matin donné et on définit les événements
- R : « Coralie se lève en retard » ;
- V : « Coralie se rend au lycée en vélo ».

1. Calculer $P(V)$

2. **a.** Que vaut $P_{\overline{V}}(R)$?

b. On remarque qu'un matin donné Coralie se rend au lycée à vélo. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?

3. Les événements R et V sont-ils indépendants ?

4. On s'intéresse à deux jours consécutifs. Quelle est la probabilité que Coralie soit allée au lycée à vélo deux jours de suite ?

Exercice 5 - Probabilités et suites

On considère une urne $\mathscr{U}$ contenant deux boules blanches et une boule noire ; ainsi qu'une urne $\mathscr{V}$ contenant une boule blanche et trois boules noires, toutes indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans ces urnes comme suit :
- le premier tirage a lieu dans l'urne $\mathscr{U}$;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne ;

- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : « le $n^{\text{ième}}$ tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}$ » et $u_n = P(U_n)$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs de $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$

3. Etablir une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul. On appelle décomposition de n toute p-liste d'entiers supérieurs ou égaux à 1, dont la somme vaut n (une p-liste est une liste de p éléments, p étant un entier quelconque entre 1 et n)

Une décomposition $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de n vérifie donc : $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$

Par exemple : $(4), (1,3), (3,1), (1,2,1)$ et $(1,1,1,1)$ sont différentes décompositions de $n = 4$

Dans la suite de l'exercice, on note $D(n)$ le nombre de décompositions différentes de n et $N(p,n)$ le nombre de décompositions de n qui sont des p-listes.

1. Énumérer les décompositions de 1, de 2 et de 3. En déduire $D(1), D(2)$ et $D(3)$

2. Soit n un entier naturel non nul, montrez que : $N(1,n) = 1$ et $N(2,n) = n-1$

3. Soient p et n deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$
Soit $(n_1, n_2, \ldots, n_{p+1})$ une décomposition de longueur $p+1$ de n
En remarquant que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n - n_{p+1}$ et que : il y a autant de décomposition de longueur $p+1$ de n que de décomposition de longueur p de $n-k$ pour k variant de 1 à $n-p$, montrez en discutant suivant la valeur de n_{p+1} que :

$$N(p+1,n) = N(p,n-1) + N(p,n-2) + \cdots + N(p,p) = \sum_{k=p}^{n-1} N(p,k)$$

4. **a.** Justifier que : $\forall k \geqslant p+1, \binom{k-1}{p-1} = \binom{k}{p} - \binom{k-1}{p}$

Puis démontrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$

b. En déduire par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que :
$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant p, N(p,n) = \binom{n-1}{p-1}$

5. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, D(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} N(k,n)$
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, D(n) = 2^{n-1}$

6. Que fait la fonction Python ci-contre ? On détaillera la réponse, on pourra donner un exemple de test de la fonction et le résultat attendu.

```python
def f(p,n):
  if p>n :
    return 0
  if p==0 or p==n :
    return 1
  else:
    return f(p-1,n-1)+f(p,n-1)
```

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

1. **a.** Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f, puis son ensemble de dérivabilité.

b. Dresser le tableau de variations de f

c. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_f, f(x) \geqslant x \Leftrightarrow P(x) \geqslant 0$ où P est un polynôme de degré 3

d. Ecrire P sous forme factorisée (au maximum) puis résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$

e. Déterminer la tangente T à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 1

f. Peut-on parler d'une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0

g. Représenter $\mathscr{C}_f$ (*on admettra que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$)

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$, déterminer les valeurs possibles pour ℓ et émettre une conjecture sur la valeur de ℓ

3. Avec Python

a. Ecrire un programme qui définit la fonction f

b. Ecrire un programme qui trace f et sa tangente T

c. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie u_n

d. Ecrire un programme qui calcule les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les garde en mémoire, puis les représente.

e. Ecrire un programme qui permet de calculer le premier entier n pour lequel on aura $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$