Corrigé *total sur 63 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *0,5 point par question - total sur 5 points*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ Vrai, cf. cours

b) $x \mapsto \ln(x-1)$ est définie sur $]0;+\infty[$

Faux, la fonction n'est pas définie pour $x = \dfrac{1}{2}$ par exemple. Pour qu'elle soit définie, il faut que $x - 1 > 0$ et donc $x > 1$

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie de manière récursive par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ alors f est croissante $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Faux, cf. cours ,on peut donner comme contre-exemple $f(x) = x^2$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$

d) $\dbinom{23}{16} = \dbinom{23}{7}$ Vrai, car pour tous n,p $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

e) $(a+b)^n = (a-b)^n$ Faux, on peut tester avec $a = b = 1$

f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Vrai, on applique la formule du binôme de Newton à a et $-b$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ Vrai, on applique la formule du binôme de Newton à $a = 1$ et $b = 1$

h) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ Vrai, cf. cours

i) Le polynôme P défini par $P(x) = (x+1)(x-7)(3+7x^2)$ peut être encore factorisé.

Faux, en effet, $\forall x \in \mathbb{R}, 3 + 7x^2 > 0$ donc ce facteur ne peut être simplifié (pas de racine pour $3 + 7x^2$).

j) $P(A \cap B) = P(A)P_B(A)$ Faux, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Exercice 2 - un polynôme à scinder *6 points*

Soit P le polynôme définie par $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$

1. Factoriser P au maximum. *2 points*

1 est une racine évidente ($P(1) = 1 + 6 + 5 - 12 = 0$), donc P peut s'écrire $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2

On pose alors $Q(x) = ax^2 + bx + c$
donc $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
En identifiant les coefficients, on obtient $a = 1, \quad b - a = 6, \quad c - b = 5$ et $c = -12$
donc finalement $a = 1 \quad b = 7 \quad c = 12$ et de fait $Q(x) = x^2 + 7x + 12$

Reste à trouver les racines (éventuelles) de Q
On trouve $\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1$ donc Q admet pour racines :
$x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{1}}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{1}}{2} = -3$
donc $Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x+4)(x+3)$ et finalement $P(x) = (x+4)(x+3)(x-1)$

2. Etudier le signe de P *1 point*

x	$-\infty$		-4		-3		1		$+\infty$
$x+4$		-	0	+		+		+	
$x+3$		-		-	0	+		+	
$x-1$		-		-		-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

$x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -4$
$x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$
$x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

donc $\forall x \in [-4;-3] \cup [1;+\infty[, P(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in]-\infty;-4] \cup [-3;1], P(x) \leqslant 0$

3. Résoudre l'inéquation $(\ln(x))^3 + 6(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 12 \geqslant 0$ *1,5 points*

Cette inéquation équivaut à $P(\ln(x)) \geqslant 0$
or d'après la question précédente $P(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-4; -3] \cup [1; +\infty[$
autrement dit $P(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant -3$ ou $1 \leqslant x$
donc $P(\ln(x)) \geqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant \ln(x) \leqslant -3$ ou $1 \leqslant \ln(x)$
donc $P(\ln(x)) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-4} \leqslant e^{\ln(x)} \leqslant e^{-3}$ ou $e^1 \leqslant e^{\ln(x)}$ (par croissance de exp et ln)
i.e. $P(\ln(x)) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-4} \leqslant x \leqslant e^{-3}$ ou $e \leqslant x$

4. Résoudre l'équation $e^{-3x} + 6e^{-2x} + 5e^{-x} - 12 = 0$ *1,5 points*

Cette équation s'écrit aussi $(e^{-x})^3 + 6(e^{-x})^2 + 5e^{-x} - 12 = 0$ ce qui correspond à $P(e^{-x}) = 0$
or les racines de P sont $-4, -3$ et 1
donc $e^{-3x} + 6e^{-2x} + 5e^{-x} - 12 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = -4$ ou $e^{-x} = -3$ ou $e^{-x} = 1$
donc $e^{-3x} + 6e^{-2x} + 5e^{-x} - 12 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1$ (les deux autres sont impossibles)
finalement $e^{-3x} + 6e^{-2x} + 5e^{-x} - 12 = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exercice 3 - suite implicite *7 points*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$

1. a. Dresser le tableau de variations de f_n *1 point*

Quel que soit n entier, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$
donc dès lors que $x > 0, f_n'(x) > 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	-4 $\nearrow$

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera u_n cette solution.
Indication : on pourra raisonner en utilisant les valeurs de la fonction f_n et sa continuité. *1 point*

f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue. De plus $f_n(0) = -4$ et $f(10) > 0$ par exemple, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ (on invoquera bientôt pour cela le théorème de la bijection).

c. Calculer u_1 et u_2 *1,5 points*

D'après la définition donnée à la question précédente, u_1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de $f_1(x) = 0$, i.e. l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de $x + 9x^2 - 4 = 0$
or cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 144 = 145$ et les solutions sont :
$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{145}}{18}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{18}$ donc $u_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{18}$ puisque, comme $x_1 < 0$, la seule solution sur $\mathbb{R}_+$ est x_2

De même u_2 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de $f_2(x) = 0$, i.e. $x^2 + 9x^2 - 4 = 0$ soit $10x^2 = 4$
donc la seule solution positive est $x = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ donc $u_2 = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0; 1[$
*Même indication qu'à la question **b.*** *1 point*

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(1) = 1^n + 9 \times 1^2 - 4 = 1 + 9 - 4 = 6 > 0$
donc d'après l'étude des variations de f_n (f_n strictement croissante, $f_n(0) = -4, f_n(1) = 4$ et f_n continue), on en déduit que l'unique solution de $f_n(x) = 0$ est située sur l'intervalle $]0; 1[$, i.e. $u_n \in]0; 1[$

2. a. Montrer que $\forall x \in]0; 1[, f_{n+1}(x) < f_n(x)$ *1 point*

Soit $x \in]0; 1[$, alors $0 < x < 1$ et $x^n > 0$
donc $0 < x^{n+1} < x^n$, de fait $x^{n+1} + 9x^2 - 4 < x^n + 9x^2 - 4$
c'est-à-dire $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *1,5 points*

d'après **1.d.**, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0; 1[$ et on peut donc exploiter la question précédente :
$f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1})$ donc $0 < f_n(u_{n+1})$ (car $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$)
or par définition $f_n(u_n) = 0$, donc $f_n(u_n) < f_n(u_{n+1})$
comme f_n est strictement croissante, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$, c'est-à-dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (et même strictement).

Exercice 4 - réveil difficile *5 points*

Coralie est étudiante en classe préparatoire et un matin sur quatre elle se lève en retard.
Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre son vélo pour se rendre au lycée. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit deux fois sur cinq d'aller à pied et le reste du temps elle se rend au lycée à vélo.

On considère un matin donné et on définit les événements

- R : « Coralie se lève en retard » ;
- V : « Coralie se rend au lycée en vélo ».

1. Calculer $P(V)$ *1,5 points*

R et $\overline{R}$ forment un système complet d'événements, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales (ou par propriété $P(V) = P(V \cap R) + P(V \cap \overline{R})$) :
$P(V) = P(R)P_R(V) + P(\bar{R})P_{\bar{R}}(V) = \dfrac{1}{4} \times 1 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{20} + \dfrac{9}{20} = \dfrac{14}{20} = \dfrac{7}{10}$

2. **a.** Que vaut $P_{\overline{V}}(R)$? *1 point*

Si Coralie ne se rend pas au lycée à vélo (c'est-à-dire qu'elle s'y rend à pied), c'est forcément qu'elle s'est levée à l'heure, donc $P_{\overline{V}}(R) = 0$

on peut le retrouver avec la formule de Bayes $P_{\bar{V}}(R) = \dfrac{P(R)P_R(\bar{V})}{P(\bar{V})}$

or $P_R(\bar{V}) = 0$ donc $P_{\bar{V}}(R) = 0$

b. On remarque qu'un matin donné Coralie se rend au lycée à vélo. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ? *1 point*

On cherche $P_V(\bar{R})$ et d'après la formule de Bayes $P_V(\bar{R}) = \dfrac{P(\bar{R})P_{\bar{R}}(V)}{P(V)}$

or $P(\bar{R}) = \dfrac{3}{4}, P_{\bar{R}}(V) = \dfrac{3}{5}$ et d'après la question **1.** $P(V) = \dfrac{7}{10}$ donc $P_V(\bar{R}) = \dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{9}{14}$

3. Les événements R et V sont-ils indépendants ? *0,5 point*

Concrètement, on comprend que le fait que Coralie prenne son vélo dépend qu'elle soit en retard ou non.
Mathématiquement, on le justifie avec $P(V) \neq P_R(V)$, puisque comme vu plus haut $P(V) = \dfrac{7}{10}$ et d'après l'énoncé, $P_R(V) = 1$

4. On s'intéresse à deux jours consécutifs. Quelle est la probabilité que Coralie soit allée au lycée à vélo deux jours de suite ? *1 point*

La situation correspond à deux « tirages avec remise », les événements sont donc indépendants (on peut aussi raisonner avec la formule des probabilités composées) : $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2) = (P(V))^2 = \left(\dfrac{7}{10}\right)^2 = \dfrac{49}{100}$

Exercice 5 - Probabilités et suites *6 points*

On considère une urne $\mathscr{U}$ contenant deux boules blanches et une boule noire ; ainsi qu'une urne $\mathscr{V}$ contenant une boule blanche et trois boules noires, toutes indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans ces urnes comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne $\mathscr{U}$;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : « le $n^{\text{ième}}$ tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}$ » et $u_n = P(U_n)$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 *2 points*

D'après les notations et les hypothèses de l'énoncé, $u_1 = P(U_1) = 1$ car U_1 correspond au fait de tirer la première boule dans l'urne 1 ce qui est certain.

ensuite, le deuxième tirage s'effectue dans l'urne $\mathscr{U}$ si on a tiré une boule noire au premier tirage, ce qui arrive une fois sur trois, donc $u_2 = \dfrac{1}{3}$

pour le justifier plus précisément, d'après la « petite formule des probabilités totales » :
$P(U_2) = P(U_1 \cap U_2) + P(\overline{U_1} \cap U_2)$
soit $P(U_2) = P(U_1)P_{U_1}(U_2) + P(\overline{U_1})P_{\overline{U_1}}(U_2)$ i.e. $u_2 = u_1 P_{U_1}(U_2) + (1 - u_1)P_{\overline{U_1}}(U_2)$ avec les notations de l'énoncé
donc $u_2 = 1 \times \dfrac{1}{3} + 0$ car $u_1 = 1$ et $P_{U_1}(U_2) = \dfrac{1}{3}$ comme évoqué précédemment

enfin, le troisième tirage peut s'effectuer dans l'urne $\mathscr{U}$ après un deuxième tirage dans la même urne (lors duquel une noire a été tirée) ou après un tirage dans l'urne $\mathscr{V}$ (lors duquel une noire a été tirée)
autrement dit, toujours avec la même formule $P(U_3) = P(U_2 \cap U_3) + P(\overline{U_2} \cap U_3)$
soit $P(U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2})P_{\overline{U_2}}(U_3)$ et donc $u_3 = u_2 \times P_{U_2}(U_3) + (1 - u_2) \times P_{\overline{U_2}}(U_3)$
or comme nous venons de la voir $u_2 = \dfrac{1}{3}$; de plus $P_{U_2}(U_3) = P_{U_1}(U_2) = \dfrac{1}{3}$ ce qui correspond au fait de tirer dans l'urne $\mathscr{U}$ (ici au troisième tirage) sachant que le tirage précédent a été fait dans la même urne, autrement au fait de tirer une boule noire dans l'urne $\mathscr{U}$ soit une chance sur trois
de même $P_{\overline{U_2}}(U_3) = \dfrac{1}{4}$ correspond au fait de tirer dans l'urne $\mathscr{U}$ sachant que le tirage précédent a été fait dans l'urne $\mathscr{V}$, autrement au fait de tirer une boule blanche dans l'urne $\mathscr{V}$ soit une chance sur quatre
finalement $u_3 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{18} + \dfrac{3}{18} = \dfrac{2+3}{18} = \dfrac{5}{18}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs de $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$ *0,5 point*

Comme nous l'avons vu à la question **1.** $P_{U_n}(U_{n+1}) = P_{U_2}(U_3) = \dfrac{1}{3}$ car cela correspond au fait de tirer dans l'urne $\mathscr{U}$ (au $n+1^{\text{ème}}$ tirage) sachant que le tirage précédent (le $n^{\text{ème}}$) a été fait dans la même urne, autrement au fait de tirer une boule noire dans l'urne $\mathscr{U}$ soit une chance sur trois. Cela ne dépend pas du numéro du tirage puisque les tirages s'effectuent avec remise.
de même $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = P_{\overline{U_2}}(U_3) = \dfrac{1}{4}$ correspond au fait de tirer dans l'urne $\mathscr{U}$ sachant que le tirage précédent a été fait dans l'urne $\mathscr{V}$, autrement au fait de tirer une boule blanche dans l'urne $\mathscr{V}$ soit une chance sur quatre.

3. Etablir une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *1,5 points*

Comme vu à la question **1.**, enfin, un tirage (ici le $n+1^{\text{ème}}$) peut s'effectuer dans l'urne $\mathscr{U}$ soit après un tirage (ici le $n^{\text{ème}}$) dans la même urne (lors duquel une noire a été tirée) soit après un tirage dans l'urne $\mathscr{V}$ (lors duquel une noire a été tirée)
plus précisément, d'après la « petite formule des probabilités totales » : $P(U_{n+1}) = P(U_n \cap U_{n+1}) + P(\overline{U_n} \cap U_{n+1})$
soit $P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$ et donc d'après les notations de l'énoncé et les résultats de la question **3.** $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1}{3} + (1 - u_n) \times \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) u_n + \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{4}{12} - \dfrac{3}{12}\right) u_n + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}u_n + \dfrac{1}{4}$

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *2 points*

D'après le résultat précédent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique, on va donc l'expliciter selon la méthode habituelle. Dans un premier temps, on cherche le point fixe :
$\alpha = \dfrac{1}{12}\alpha + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{11}{12}\alpha = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{12}{11} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{11}$
on introduit alors la suite auxiliaire définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - \dfrac{3}{11}$
alors pour $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{12}u_n + \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{11}$ d'après **3.**
donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{12}u_n + \dfrac{11}{44} - \dfrac{12}{44} = \dfrac{1}{12}u_n - \dfrac{1}{44} = \dfrac{1}{12}\left(v_n + \dfrac{3}{11}\right) - \dfrac{1}{44} = \dfrac{1}{12}v_n + \dfrac{1}{12} \times \dfrac{3}{11} - \dfrac{11}{44} = \dfrac{1}{12}v_n$
car $\dfrac{1}{12} \times \dfrac{3}{11} = \dfrac{1 \times 3}{12 \times 11} = \dfrac{1 \times 3}{3 \times 4 \times 11} = \dfrac{1}{44}$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} v_1 = \dfrac{1}{12^{n-1}}v_1$
or $v_1 = u_1 - \dfrac{3}{11} = 1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11}$ car $u_1 = 1$ d'après **1.** donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{8}{11} \times \dfrac{1}{12^{n-1}}$
or $u_n = v_n + \dfrac{3}{11}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{3}{11} + \dfrac{8}{11} \times \dfrac{1}{12^{n-1}} = \dfrac{1}{11}\left(3 + 8 \times \dfrac{1}{12^{n-1}}\right)$

Exercice 6 *12 points*

Soit n un entier naturel non nul. On appelle décomposition de n toute p-liste d'entiers supérieurs ou égaux à 1, dont la somme vaut n (une p-liste est une liste de p éléments, p étant un entier quelconque entre 1 et n)

Une décomposition $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ de n vérifie donc : $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$

Par exemple : $(4), (1,3), (3,1), (1,2,1)$ et $(1,1,1,1)$ sont différentes décompositions de $n = 4$

Dans la suite de l'exercice, on note $D(n)$ le nombre de décompositions différentes de n et $N(p, n)$ le nombre de décompositions de n qui sont des p-listes.

1. Énumérer les décompositions de 1, de 2 et de 3. En déduire $D(1), D(2)$ et $D(3)$ *1 point*

   La seule décomposition de 1 est (1) donc $D(1) = 1$
   2 admet pour décomposition (2) et $(1,1)$ donc $D(2) = 2$
   3 admet pour décomposition $(3), (1,2), (2,1)$ et $(1,1,1)$ donc $D(3) = 4$

2. Soit n un entier naturel non nul. Montrez que : $N(1,n) = 1$ et $N(2,n) = n-1$ *1,5 points*

   Par définition, $N(1,n)$ est le nombre de décomposition de n à 1 élément. Cet élément vaut alors forcément n, donc $N(1,n) = 1$
   et $N(2,n)$ est le nombre de décompositions de n à 2 élément i.e. $n = n_1 + n_2$ avec $n_1 \geqslant 1$ et $n_2 \geqslant 1$
   or $n_2 = n - n_1$ donc $n_2 \geqslant 1 \Rightarrow n - n_1 \geqslant 1 \Rightarrow n_1 \leqslant n-1$
   autrement dit, n_1 peut prendre toutes les valeurs de $[\![1, n-1]\!]$ et n_2 est alors déterminé par $n_2 = n - n_1$, il y a donc $n-1$ possibilités pour n_1 et à chaque fois une seule pour n_2 donc $N(2,n) = n-1$

3. Soient p et n deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$ *2 points*
   Soit $(n_1, n_2, \dots, n_{p+1})$ une décomposition de longueur $p+1$ de n
   En remarquant que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n - n_{p+1}$ et que : il y a autant de décomposition de longueur $p+1$ de n que de décomposition de longueur p de $n-k$ pour k variant de 1 à $n-p$, montrez en discutant suivant la valeur de n_{p+1} que :

   $$N(p+1,n) = N(p,n-1) + N(p,n-2) + \dots + N(p,p) = \sum_{k=p}^{n-1} N(p,k)$$

   L'énoncé dit presque tout, on va essayer de l'expliquer :
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$
   soit $k \in [\![p, n-1]\!]$ et $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ des entiers naturels non nuls tels que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = k$
   alors $n_1 + n_2 + \dots + n_p + (n-k) = k + n - k = n$ de plus $k \leqslant n-1 \Rightarrow -k \geqslant 1 - n \Rightarrow n - k \geqslant 1$
   donc chaque décomposition de k à p éléments peut se compléter par une unique décomposition de n à $p+1$ éléments (le $p+1^{\text{ème}}$ vaut forcément $n-k$) et ce $\forall k \in [\![p, n-1]\!]$
   et réciproquement comme l'indique l'énoncé, toute décomposition de n à $p+1$ éléments engendre une décomposition de $n-k$ à p éléments (où k prend les valeurs du n_{p+1} donc varie entre 1 et $n-p$ car $\forall i \in [\![1,p]\!], n_i \geqslant 1 \Rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_p \geqslant p \Rightarrow n - n_{p+1} \leqslant n - p$)
   finalement toute décomposition de n à $p+1$ éléments peut se voir comme une décomposition de k à p éléments à laquelle on ajoute $n-k$, où k varie entre p et $n-1$, or il y a $N(k,p)$ décomposition de k à p éléments pour chaque valeur de k

   d'où $N(p+1,n) = N(p,p) + N(p,p+1) + \dots + N(p,n-2) + N(p,n-1) = \displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} N(p,k)$

4. **a.** Justifier que : $\forall k \geqslant p+1, \dbinom{k-1}{p-1} = \dbinom{k}{p} - \dbinom{k-1}{p}$ *2 points*

   Puis démontrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$

   D'après la formule du triangle de Pascal $\forall k \geqslant p+1$:
   $\dbinom{k}{p} = \dbinom{k-1}{p-1} + \dbinom{k-1}{p}$ et donc $\dbinom{k-1}{p-1} = \dbinom{k}{p} - \dbinom{k-1}{p}$

   donc, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{p-1}{p-1} + \sum_{k=p+1}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = 1 + \sum_{k=p}^{n-1} \left[\binom{k}{p} - \binom{k-1}{p} \right]$ (attention la formule de Pascal n'est pas valable pour $k = p$)

   donc, en notant, $a_k = \dbinom{k}{p}$, on a $\dbinom{k-1}{p} = a_{k-1}$ et donc $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \sum_{k=p+1}^{n-1} (a_k - a_{k-1})$ est une somme télescopique et par propriété $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) = a_{n-1} - a_p$

or $a_{n-1} = \binom{n-1}{p}$ et $a_p = \binom{p}{p} = 1$ donc $\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = 1 + \binom{n-1}{p} - 1 = \binom{n-1}{p}$

Nota bene : il y a une petite subtilité si $p = n-1$, en effet la somme $\sum_{k=p+1}^{n-1}$ n'a alors pas de sens. Mais on peut remarquer que dans ce cas, la somme ne contient qu'un seul terme $\sum_{k=n-1}^{n-1} \binom{k-1}{n-1-1} = \binom{n-2}{n-2} = 1 = \binom{n-1}{n-1}$ et donc la formule est également vérifiée.

b. En déduire par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant p, N(p,n) = \binom{n-1}{p-1}$ *2 points*

Ici, comme l'indique l'énoncé, la propriété pour une valeur de p donnée comprend plusieurs valeurs de n pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(p) : \forall n \geqslant p, N(p,n) = \binom{n-1}{p-1}$

<u>Initialisation</u> : $P(1)$ s'écrit $\forall n \geqslant 1, N(1,n) = \binom{n-1}{1-1}$

d'une part $N(1,n) = 1$ et d'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{0}{n-1} = 1$ donc $P(1)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(p)$ est vraie

soit $n \geqslant p+1$, alors d'après **3.** $N(p+1,n) = \sum_{k=p}^{n-1} N(p,k)$

or par hypothèse, $\forall n \geqslant p, N(p,n) = \binom{n-1}{p-1}$ donc pour $k \geqslant p, N(p,k) = \binom{k-1}{p-1}$

donc $N(p+1,n) = \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1}$ et d'après **4.a.** $\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$

donc $N(p+1,n) = \binom{n-1}{p}$, i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*, P(p)$ est vraie

5. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, D(n) = \sum_{k=1}^{n} N(k,n)$ *1,5 points*

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, D(n) = 2^{n-1}$

Par définition, une décomposition doit comporter au moins 1 élément et elle peut en comporter au plus n, donc il y a autant de décomposition de n que de décomposition de n à k éléments où k varie entre 1 et n donc $D(n) = \sum_{k=1}^{n} N(k,n)$

donc d'après la question précédente, $D(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$ par changement d'indice $i = k-1$

or $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^i 1^{n-1-i} = (1+1)^{n-1}$ d'après la formule du binôme de Newton

donc $D(n) = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$

6. Que fait la fonction Python ci-contre ? *2 points*

On détaillera la réponse, on pourra donner un exemple de test de la fonction et le résultat attendu.

```
def f(p,n):
  if p>n :
    return 0
  if p==0 or p==n :
    return 1
  else:
    return f(p-1,n-1)+f(p,n-1)
```

Cette fonction prend en argument deux entier p et n et renvoie, sauf cas particulier $f(p-1,n-1) + f(p,n-1)$
donc d'une manière générale $f(p,n) = f(p-1,n-1) + f(p,n-1)$
et d'autre part, $\forall n, f(0,n) = f(n,n) = 1$ et $\forall p > n, f(p,n) = 0$
toutes ces propriétés sont vérifiées par les coefficients binomiaux, donc on présume que $f(p,n) = \binom{p}{n}$, ce qui est le cas.

On peut le vérifier par exemple avec $f(2,4)$ qui doit valoir 6, ce qui est le cas.

Exercice 7 *22 points*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

1. **a.** Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f, puis son ensemble de dérivabilité. *2 points*

f est définie dès que le contenu de la racine carrée est défini, i.e. dès que $x-2 \neq 0$ et $\dfrac{x}{2-x} \geqslant 0$; on va donc utiliser un tableau de signes, sachant que $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$ (de même $2-x<0 \Leftrightarrow x>2$)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

donc $\mathscr{D}_f = [0,2[$ et pour la dérivabilité, il faut que le contenu de la racine carrée soit strictement positif donc le domaine de dérivabilité est $]0,2[$

b. Dresser le tableau de variations de f *2,5 points*

de plus $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{2-x}$ donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $u(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)}$
avec $v(x) = x$ et $w(x) = 2-x$ (de fait $v'(x) = 1$ et $w'(x) = -1$)
donc $u' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$ donc $u'(x) = \dfrac{2-x-x\times(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2-x)^2}$
et donc $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}(2-x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(2-x)^{3/2}}$ (les différentes racines sont bien définies sur $]0,2[$
donc $\forall x \in]0,2[, f'(x) > 0$ car c'est le résultat d'un quotient de termes strictement positifs ($(2-x)^{3/2} = e^{\frac{3}{2}\ln(2-x)}$),
donc f est strictement croissante sur $\mathscr{D}_f$ (et $f(0) = 0$) d'où le tableau :

x	0		2
f	0	$\nearrow$	$\Vert$

c. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}_f, f(x) \geqslant x \Leftrightarrow P(x) \geqslant 0$ où P est un polynôme de degré 3 *2 points*

Soit $x \in \mathscr{D}_f$, alors par définition de f, $f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x}{2-x}} \geqslant x$

on remarque que $x \in \mathscr{D}_f$ impose $x \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}^2 \geqslant x^2$ (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ et le fait que x soit positif permet d'avoir l'équivalence), donc
$f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \dfrac{x}{2-x} \geqslant x^2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2-x} - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - x^2\times(2-x)}{2-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2x^2+x^3}{2-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3-2x^2+x}{2-x} \geqslant 0$
or $x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow x \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant x \Leftrightarrow P(x) \geqslant 0$ avec $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d. Ecrire P sous forme factorisée (au maximum) puis résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$ *1,5 points*

P est factorisable par x, $P(x) = x(x^2-2x+1)$ et $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
donc $P(x) = x(x-1)^2$ donc $\forall x \in \mathscr{D}_f, P(x) \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$)
donc d'après la question précédente, $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) \geqslant x$

e. Déterminer la tangente T à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 1 *1 point*

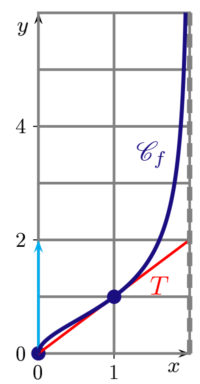
Par propriété, T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
or $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}(2-1)^{3/2}} = 1$ et $f(1) = \sqrt{\dfrac{1}{2-1}} = \sqrt{1} = 1$
donc $T : y = (x-1)+1$ i.e. T a pour équation $y = x$

f. Peut-on parler d'une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 *0,5 point*

On ne peut pas donner d'équation comme pour la tangente T car f' n'est pas définie en 0, mais comme pour la racine carrée en 0, f admet une tangente verticale en 0 (comme si le coefficient directeur était infini).

g. Représenter $\mathscr{C}_f$ (*on admettra que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$) *2 points*

On utilise les informations disponibles : $f(0), f(1), T$, la tangente en 0, la position relative de f et T et la limite (cf ci-dessous).



2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ *1,5 points*

Par récurrence évidemment, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
de plus, par hypothèse encore $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ car f est strictement croissante d'après **1.b.**
or $f(u_n) = u_{n+1}, f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
au passage, on peut remarquer que par hypothèse $u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_n \in \mathscr{D}_f$ donc $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien défini
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. u_n existe et $0 \leqslant u_n < 1$

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. *1 point*

d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $u_n \in \mathscr{D}_f$
de plus d'après **1.d.** $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) \geqslant x$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \geqslant u_n$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$ i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$, déterminer les valeurs possibles pour ℓ et émettre une conjecture sur la valeur de ℓ *1,5 points*

De manière analogue à la question **1.c.**, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{\ell}{2-\ell}} = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell}{2-\ell} = \ell^2 \Leftrightarrow \dfrac{P(\ell)}{2-\ell} = 0 \Leftrightarrow P(\ell) = 0$
(là encore, c'est $\ell \geqslant 0$ qui garantit l'équivalence), or d'après **1.d.**, les seules racines de P sont 0 et 1 donc les seules valeurs possibles sont $\ell = 0$ ou $\ell = 1$

de plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc on present que la limite ne peut être 0 et que $\ell = 1$ (nous verrons plus précisément ce raisonnement quand nous étudierons les limites de suites).

3. Avec Python

a. Ecrire un programme qui définit la fonction f *1 point*

```
import numpy as np # pour la racine carrée
def f(x):
  return np.sqrt(x/(2-x))
```

b. Ecrire un programme qui trace f et sa tangente T *1,5 points*

On importe `matplotlib.pyplot` pour la représentation, on définit une liste d'abscisses entre 0 et 1,99 avec `np.linspace`, puis on définit deux listes d'ordonnées, une pour f en utilisant la fonction f définie précédemment, et une pour la tangente. Enfin on utilise deux fois la commande plot pour voir les deux courbes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0, 1.99, 100)
y=f(x)
z=x
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,z)
plt.show()
```

c. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie u_n *1,5 points*

Au sein de la fonction, on peut intégrer une boucle `for` qui calcule les termes de manière itérative jusqu'à u_n ou utiliser une définition récursive (comme la définition mathématique de la suite), i.e. une fonction qui s'appelle elle-même. Attention dans ce cas (cf. programme), il faut mettre un « point d'arrêt », i.e. définir u_0

```
def u(n):
  if n==0:
    return 1/2
  else:
    return f(u(n-1))
```

d. Ecrire un programme qui calcule les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les garde en mémoire, puis les représente. *1,5 points*

On utilise la fonction `u` prédéfinie et on calcule tous les termes de la suite avec une boucle `for` et on ajoute chaque terme à la liste `L` qui ne contient rien initialement (liste vide). Puis, pour la représenter un simple `plot(L)` suffit puisque les abscisses sont alors implicitement $0, 1, \ldots, 99$ (il faut avoir chargé la librairie adéquate au préalable) et on ajoute le `+` pour obtenir le nuage de points.

```
L=[]
for n in range(1,100):
  L.append(u(n))

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(L,'+')
plt.show()
```

e. Ecrire un programme qui permet de calculer le premier entier n pour lequel on aura $|u_n - 1| \leqslant 10^{-4}$ *1 point*

Comme nous l'avons vu plus haut la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 1, donc on calcule ses termes grâce à la fonction `u` définie plus haut, jusqu'à ce que l'écart entre 1 et u_n soit inférieur à 10^{-4}
de plus on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$, donc $|u_n - 1| = 1 - u_n$

```
n=0
while 1-u(n)>10**(-4):
  n=n+1
print(n)
```