Devoir à faire en binôme, obligatoirement, vous rendrez une copie pour deux.
Objectif qualité !

Exercice 1

On s'intéresse aux résultats d'un étudiant lors d'une épreuve de mathématiques.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- si l'étudiant a réussi la question n alors il a la probabilité $\frac{3}{4}$ de réussir la suivante
- si l'étudiant n'a réussi la question n alors il a la probabilité $\frac{1}{2}$ de réussir la suivante

On suppose que l'étudiant réussit la première question et on note r_n la probabilité que l'étudiant réussisse la question n

1. Calculer r_2 et r_3
2. Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre r_{n+1} et r_n
3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, r_n en fonction de r_1
4. Emettre une conjecture sur la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat.
5. Les événements « l'étudiant réussit la question n » et « l'étudiant réussit la question $n+1$ » sont-ils indépendants ?
6. On s'intéresse maintenant à l'enchainement des 5 premières questions
   - **a.** quelle est la probabilité que l'étudiant les réussisse toutes ?
   - **b.** quelle est la probabilité que l'étudiant n'en rate qu'une seule ?
7. Que réalise le programme Python ci-dessous (on prendra le soin de détailler la réponse) ?

```python
import numpy.random as rd
R=[1]
r=1
for i in range(2,6):
    if r==1:
        a=rd.randint(1,5)
        if a==4 :
            r=0
    else :
        a=rd.randint(1,3)
        if a==1 :
            r=1
    R.append(r)
print(R, sum(R))
```

Exercice 2

On définit l'application h par $h = \exp \circ \exp$

1. Déterminer $\mathscr{D}_h$, l'ensemble de définition de h, puis l'expression de $h(x)$
2. Déterminer $h\langle[0,+\infty[\rangle$
   On cherchera à justifier la limite en $+\infty$
3. Montrer que h n'est pas surjective de $\mathscr{D}_h$ dans $\mathbb{R}$
4. Montrer que h est injective.
5. Démontrer que h est une bijection de $\mathscr{D}_h$ dans $]1,+\infty[$ et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3 - fonction et suite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+3}$
et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$
3. Etudier les variations de la fonction f
4. Montrer que, pour tout entier naturel $n, 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$
5. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. **a.** Pour $x \in \mathscr{D}_f$, étudier le signe de $f(x) - x$
   b. Retrouver le résultat de la question **5.**
7. Déterminer l'équation de T, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
8. Sur l'intervalle $[-2;2]$, représenter $\mathscr{C}_f$, la droite d'équation $y = x$ et l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la méthode « en escalier ».
9. A l'aide de la représentation graphique de la suite réalisée à la question **8.**, émettre une conjecture sur la convergence de la suite.
10. Avec Python,
    - **a.** écrire un programme qui représente $\mathscr{C}_f, T$ et la droite d'équation $y = x$ sur un même graphique et sur l'intervalle $[-2;2]$
    - **b.** écrire un programme qui représente les 100 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
    - **c.** écrire un programme qui permet de déterminer le premier entier n pour lequel on aura $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$ où ℓ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$