Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- donner les définitions de base : application, composition, image directe, injection, surjection, bijection, application réciproque ☐
- déterminer l'image directe (l'ensemble image) d'une application. ☐
- démontrer qu'une application est injective, surjective ou bijective. ☐
- appliquer la méthode pour trouver la formule explicite d'une application réciproque. ☐

Commençons par la fin : une application bijective

La fonction ln illustre une problématique essentielle de ce chapitre. En effet, nous avons vu que tout élément de l'ensemble d'arrivée (ici $\mathbb{R}$) est atteint une et une seule fois, ce que l'on traduit par :
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in]0;+\infty[, y = \ln(x)$

Et on peut donc définir le chemin inverse que nous avons appelé la fonction exponentielle :

$$\begin{array}{ccccc}]0;+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow &]0;+\infty[\\ x & \mapsto & y=\ln(x) & \mapsto & \exp(y)=\exp(\ln(x))=x \end{array}$$

On dira que ln est bijective (de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$) et de fait exp est également bijective (de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$).

Autre exemple : peut-on en dire autant sur la fonction carré ?

Non puisque d'une part certaines valeurs sont atteintes deux fois :
par exemple $f(-2) = 4 = f(2) \quad f(-1) = f(1) \ldots$
et d'autre part (considérant la fonction carré définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), certaines valeurs ne sont pas atteintes : $-3, -7, -112$ par exemple (toutes les valeurs strictement négatives en fait).
Par contre en se limitant à $\mathbb{R}_+$ comme ensembles de départ et d'arrivée, la fonction devient bijective.
On dira donc que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ (qui n'est pas la fonction carré mais une restriction) est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On peut donc définir le chemin inverse qui est la fonction racine carrée :

$$\begin{array}{ccccc} [0;+\infty[& \rightarrow & [0;+\infty[& \rightarrow & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & y=x^2 & \mapsto & \sqrt{y}=\sqrt{x^2}=x \end{array}$$

1 Premières définitions

Définition : soit E et F des ensembles.

- Une **application** f de E vers F (on dira aussi une fonction f de domaine de définition E, à valeurs dans F), est un procédé qui associe à chaque élément x de E un unique élément de F, noté $f(x)$. Cet élément $f(x)$ de F est alors appelé **l'image** de x par l'application f
- Lorsque $y \in F$ est l'image d'un certain $x \in E$ par f, on a $y = f(x)$, et on dit que x est **un antédédent** de y par f
- L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** de l'application f, et l'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivée** de l'application f
- Cette application se note :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque : fonction vient du latin *functio* qui signifie « accomplir, exécuter ».

On peut d'ailleurs voir une application comme une succession d'opérations. Par exemple, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5\sqrt{(x+1)^2+3} \end{array}$ correspond au procédé suivant appliqué à n'importe quel réel x :

ajouter 1 $\rightarrow$ élever au carré $\rightarrow$ ajouter 3 $\rightarrow$ prendre la racine carrée $\rightarrow$ multiplier par 5

Exemples :

1. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$
   - on ne peut écrire $f(x)$ pour n'importe quel x réel. On sait que $\sqrt{x-2}$ n'a de sens que pour $x \geqslant 2$. On dit que le domaine de définition de f est $[2;+\infty[$
   - lorsque $x \in [2;+\infty[$, $f(x)$ désigne un unique nombre réel.
   - on peut donc bien définir une application (qu'on pourra noter aussi f) dont l'ensemble de départ est $\mathscr{D}_f = [2;+\infty[$, et l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. On notera $f : \begin{array}{l} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x-2} \end{array}$

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2+3 \end{array}$, alors f est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$
   les images par f de 0, -1, de -2 sont respectivement : $3, 4$ et 7
   les antécédents de 3 et 7 par f sont respectivement : 0 et -2 et 2
   en effet, $f(n) = 7 \Leftrightarrow n^2+3 = 7 \Leftrightarrow n^2 = 4 \Leftrightarrow n = -2 \text{ ou } n = 2$

3. Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\ln(x))^2 \end{array}$. C'est une application de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
   on a $f(1) = 0$, donc 0 est l'image de 1 par f, c'est-à-dire que 1 est un antécédent de 0 par f
   on a $f(e) = f\left(\frac{1}{e}\right) = 1$, donc 1 est l'image de e et de $\frac{1}{e}$ par f, c'est-à-dire que e et $\frac{1}{e}$ sont deux antécédents de 1 par f

4. On définit une application en associant à chaque roman d'une bibliothèque les initiales de son auteur. L'ensemble de départ est l'ensemble des romans que possède la bibliothèque et l'ensemble d'arrivée est $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, à $\mathcal{A}$ est l'ensemble des lettres de l'alphabet. L'image du roman « Les misérables » est VH. L'image du roman « Les possédés » est FD. L'élément (E, Z) a pour antécédents les romans « La terre », « L'assomoir » et « Nana ».

5. Le procédé qui associe à chaque élève de la classe la date du jour de sa naissance est une fonction,
   - de domaine de définition : l'ensemble des élèves de la classe
   - à valeurs dans : $[\![1;31]\!]$ ou $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$

Définition : deux applications f et g sont **égales** si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F, et si $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$

Exemple : soit f et g les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+e^x), \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1+e^{-x})$$

Montrer que $f = g$

En effet, f est g ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée, de plus

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x + \ln(1+e^{-x}) = \ln(e^x) + \ln(1+e^{-x}) = \ln[e^x(1+e^{-x})] = \ln(e^x+1) = f(x)$

2 Image directe

Définition : soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application et A une partie de E. On appelle **image directe** de A par f, et on note $f\langle A\rangle$, c'est-à-dire l'ensemble des images par f des éléments de A. Autrement dit :

$$f\langle A\rangle = \{f(x), x \in A\}$$

Propriété : soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application, et A une partie de E. Pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y \in f\langle A\rangle \iff \exists x \in A, f(x) = y}$$

Exemples :

1. L'image directe de $\mathbb{R}_+$ par exp est l'intervalle $[1;+\infty[$. L'image directe de $\mathbb{R}_-$ est $]0;1]$

2. Avec f la fonction carré :
   $f\langle\mathbb{R}\rangle = \mathbb{R}_+$, $f\langle[1;2[\rangle = [1;4[$, $f\langle\mathbb{R}_+\rangle = \mathbb{R}_+$, $f\langle[-3,-2]\rangle = [4;9]$, et $f\langle[-2;1]\rangle = [0;4]$
3. Reprenons l'exemple de l'application f définie de $[2;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sqrt{x-2}$
   l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, mais tous les réels ne sont pas des valeurs de f. L'ensemble des valeurs de f, c'est l'ensemble des $f(x)$ pour x parcourant $[2;+\infty[$, c'est-à-dire $f\langle[2;+\infty[\rangle$, il s'agit de $\mathbb{R}_+$. Un réel y tel que $y \notin \mathbb{R}_+$, y n'a pas d'antécédent par f(par exemple -1).
4. Avec f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = (\ln(x))^2$. Si l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, alors il est différent de $f\langle\mathbb{R}_+^*\rangle$ (-1 par exemple n'a pas d'antécédent).

⚠ Comme le montre les exemples précédents, l'ensemble d'arrivée n'est pas nécessairement égal à l'image directe de l'ensemble de départ.

3 Composition

Quand on définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{x^2+1}$, on compose en fait deux applications, $g : x \mapsto x^2+1$, suivie de exp, car $\varphi(x) = \exp(g(x))$. On peut le voir comme le procédé :
$x \mapsto x^2+1 = y \mapsto \exp(y) = \exp(x^2+1)$

<u>Définition</u> : soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ des applications (avec $D \subset \mathbb{R}$)

- si on a : $\forall x \in A, \quad f(x) \in D$, alors, pour chaque $x \in A$, on peut définir le nombre $g(f(x))$
- l'application $x \mapsto g(f(x))$, d'ensemble de départ A (et d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$) est notée $g \circ f$, et est appelée la **composée de f et g**.

$$\text{donc } g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

et donc, $\forall x \in A, g \circ f(x) = g(f(x))$

<u>Exemples</u> :

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$
   alors on peut définir $\ln \circ f$, qui est l'application : $\ln \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln(x) \end{array}$
   mais il n'est pas possible de définir $f \circ \ln$, parce que $\ln(x)$ n'est pas forcément dans $\mathbb{R}_+^*$
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
   alors on peut définir $g \circ f$ et $f \circ g$, et : $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x+1 \end{array}$ $\quad f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$
   on voit bien que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes.

⚠ Quand la composition est possible dans les deux sens, il n'y a aucune raison d'avoir $f \circ g = g \circ f$

<u>Propriété</u> : soient f, g et h trois applications, telles qu'on puisse définir $h \circ g$ et $g \circ f$
alors : $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
et on notera $h \circ g \circ f$ cette fonction.

4 Injections, surjections, bijections

4.1 Injections

<u>Définition</u> : une application f de E vers F est dite **injective** si chaque élément de F admet au plus un antécédent par f
Autrement dit une telle fonction ne peut pas avoir deux fois la même image.

Propriété : soit $f : E \to F$ une application, alors f est injective si et seulement si :

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

En effet, si f est injective, deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Et cette assertion est équivalente à sa contraposée :

$$\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

Exemples :

1. L'application qui, à un français majeur associe son numéro de sécurité sociale, est injective, puisque deux personnes ne peuvent avoir le même numéro de sécurité sociale.
2. La fonction carré n'est pas injective, mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ l'est (notée $f_{|\mathbb{R}_+}$).

   en effet $f(-1) = f(1)$, donc f n'est pas injective.
   par ailleurs, si $x, x' \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(x) = f(x')$. alors $x^2 = x'^2$, donc $|x| = |x'|$ et donc $x = x'$ (car ils sont positifs). Donc $f_{|\mathbb{R}_+}$ (la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ comme ensemble de départ) est bien injective.

Rédaction : comme nous venons de le voir

▷ Pour montrer qu'une application f de E vers F est injective, on écrit :
« soit $x \in E$ et $x' \in E$, supposons que $f(x) = f(x')$ »
à partir de cette hypothèse que nous avons faite, on doit en déduire que $x = x'$
puis on conclut « $x = x'$ donc f est injective ».

▷ Pour montrer qu'une application f n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts ayant la même image (x et x' tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$).

Propriété *(autre formulation)* : $f : E \to F$ est injective si et seulement si
quel que soit $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus une solution.

Exemple : l'application P définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $P(x) = 11(x+7)(x+2)(x-4)(x-5)$ n'est pas injective car l'équation $P(x) = 0$ admet plus d'une solution.

4.2 Surjections

Définition : une application f de E vers F est dite **surjective** (ou est appelée une **surjection**) si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f
Autrement dit ; f est surjective entre E et F si tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont atteints par f, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F, \exists\, x \in E, y = f(x)$$

Exemples :

1. La fonction carré n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puisque -3 par exemple, n'a pas d'antécédent par f

   mais l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ l'est.
   En effet, $\forall y \in \mathbb{R}_+, f(\sqrt{y}) = y$ (il y a bien au moins un antécédent : $\sqrt{y}$).
2. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$ n'est pas surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$
   en effet 3 n'a pas d'antécédent par f

Propriété : $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f\langle E \rangle = F$

Propriété *(autre formulation)* : $f : E \to F$ est surjective si et seulement si quel que soit $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution.

Exemple : soit P l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 2x + \pi$
alors P n'est pas surjective car l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution ($\Delta < 0$).

4.3 Bijections

Définition : soit $f : E \to F$ une application. f est appelée une **bijection** (on dit aussi que f est **bijective**) si f est injective, et surjective.

Autrement dit, f est une bijection si chaque élément de l'ensemble d'arrivée est atteint une et une seule fois, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

Propriété : l'application $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si
quel que soit $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution.

Exemples :

1. L'application identité id_E, définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$, est une bijection de E dans E car, quel que soit $y \in E$, l'équation $\mathrm{id}_E(x) = y$ admet une unique solution, c'est y
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+5 \end{array}$, alors f est une bijection.
   en effet, soit $p \in \mathbb{Z}$, alors $f(n) = p \Leftrightarrow n + 5 = p \Leftrightarrow n = p - 5$ (il existe une unique solution).

Définitions et propriété : soit f une bijection de E dans F

- pour chaque $y \in F$, l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est notée $f^{-1}(y)$. Il s'agit de l'unique antécédent de y par f
- alors pour $y \in F$ et $x \in E$, $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$
- on définit ainsi l'application f^{-1} de F vers E, qui associe à chaque y de F l'élément $f^{-1}(y)$ de E

Propriété et définition : soit f une bijection de E dans F

- alors f^{-1} est une bijection de F dans E. Elle est appelée la **bijection réciproque** de f
- $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x$, c'est-à-dire $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$
- $\forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) = y$, c'est-à-dire $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$

Exemples :

1. ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$
   et exp est la bijection réciproque de ln (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$).
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, et $b \in \mathbb{R}$, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   de plus, soit $y \in \mathbb{R}$, alors $y = f(x) \iff ax + b = y \iff x = \dfrac{y-b}{a}$, sachant que $a \neq 0$
   donc la réciproque de f, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{x-b}{a}$
3. Soit
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x+4}{x+1} \end{array}$$
   Montrer que f est une bijection et déterminer sa réciproque f^{-1}

Méthode et rédaction

Pour montrer que f est bijective entre E et F on peut :

▷ résoudre, pour $y \in F$ quelconque fixé, l'équation $f(x) = y$, et montrer qu'elle admet une unique solution. Avec cette méthode, généralement, on obtient une expression de la bijection réciproque.

Avec l'exemple précédent :

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, alors $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, y = \dfrac{3x+4}{x+1}$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, y(x+1) = 3x+4$ (équivalent car $x+1 \neq 0$)

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, y-4 = 3x - yx = (3-y)x$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x = \dfrac{y-4}{3-y}$ (équivalent car $3-y \neq 0$)

donc l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution, donc f est bijective

et de plus sa réciproque est : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ y & \mapsto & \dfrac{y-4}{3-y} \end{array}$

▷ faire une démonstration en deux étapes. Montrer que f est injective d'une part, et montrer que f est surjective d'autre part. Plutôt rare pour l'instant.
Par contre dès lors qu'une application n'est pas injective (ou n'est pas surjective), alors elle n'est pas bijective.

Lorsqu'on sait déjà que f est une bijection entre E et F et qu'on doit montrer que g (connue) est sa bijection réciproque, comme l'indique le théorème suivant, on vérifie : $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$

Théorème : soit $f : E \to F$ une application.
Si il existe $g : F \to E$ une application telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, alors f est bijective de E dans F, et $g = f^{-1}$

Exemple : vérifier que $f : \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x-2} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [2;+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+2 \end{array}$ sont des bijections réciproques.

Soit $x \in [2;+\infty[$, alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 + 2 = \sqrt{x-2}^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$

de même, pour $x \in \mathbb{R}_+, f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-2} = \sqrt{x^2+2-2} = \sqrt{x^2} = x$ (car $x > 0$)

donc $g \circ f = \mathrm{id}_{[2;+\infty[}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$donc f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$ (et $g^{-1} = f$).

Théorème : soient $f : E \to F$ une bijection de E dans F, et $g : F \to G$ une bijection de F dans G, alors
- $g \circ f$ est une bijection de E dans G
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

On dit plus simplement que la composée de deux bijections est une bijection.

Idée de démonstration :

$g \circ f : E \to G$

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$

$(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_E \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G$

4.4 Représentation graphique

Propriété : soit E et F des parties de $\mathbb{R}$, et soit f une bijection de E dans F, alors $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Exemples : à vérifier avec des fonctions bien connues, ln et exp, fonctions carré et racine carrée, fonction inverse et elle-même...