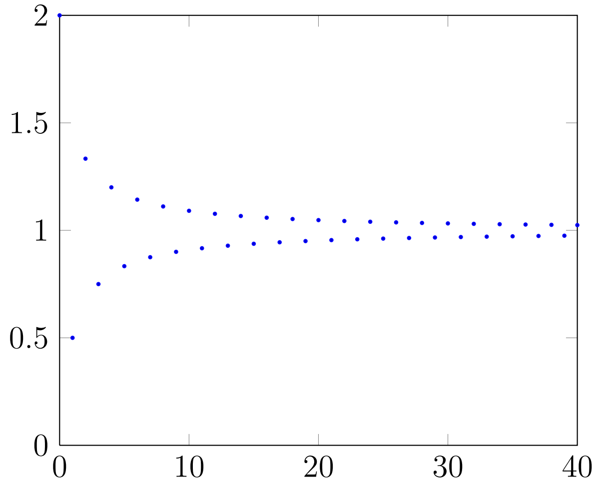
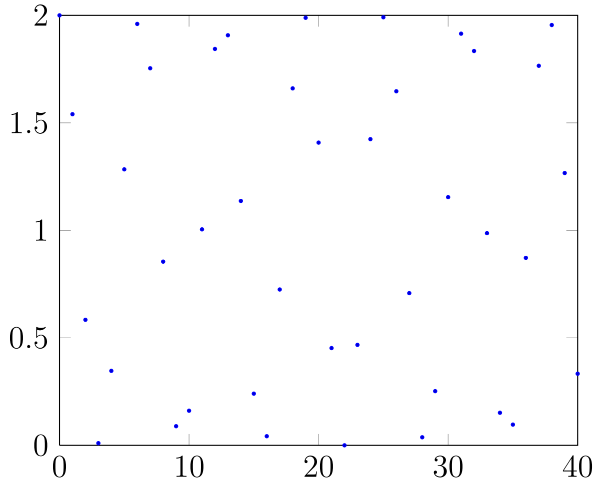
**Objectifs d'apprentissage**

A la fin de ce chapitre, je sais :
- déterminer une limite à l'aide des suites de référence. ☐
- déterminer une limite à l'aide des propriétés sur les limites : opérations et encadrement. ☐
- montrer l'existence d'une limite grâce à la monotonie d'une suite. ☐
- déterminer une limite à l'aide des croissances comparées de suites. ☐
- démontrer que deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune. ☐
- utiliser la convergence des deux sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ pour montrer celle de $(u_n)$ ☐

# 1 Introduction

Comment définir la notion de limite ? Regardons l'allure de deux suites.




Dans le premier cas, on voit que les termes deviennent infiniment proches de 1, dans le deuxième cas, aucune tendance ne semble se dégager.

# 2 Limites, définitions

## 2.1 Convergence d'une suite

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un réel $\ell$ tel que :

« tout intervalle ouvert contenant $\ell$, contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini d'entre elles ».

On dira alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $\ell$ et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $u_n \to \ell$

Remarques :
- la définition est équivalente à « tout intervalle ouvert contenant $\ell$, contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang » ;
- la convergence signifie donc une limite finie.

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **divergente** si elle ne converge pas.

Exemple (pour le faire une fois) : démontrons que $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0

Soit $]\alpha,\beta[$ tel que $0 \in ]\alpha,\beta[$ (i.e. $]\alpha,\beta[$ est un intervalle ouvert contenant 0).

alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \beta \Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{\beta}$ (car $\beta > 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$)
alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \beta \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\beta^2}$ (car les fonctions carré et $\sqrt{.}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$)
alors en posant alors $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\beta^2} \right\rfloor + 1$ (ou un entier plus grand que $\dfrac{1}{\beta^2}$),
$\forall n \geqslant n_0, \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \beta$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in ]\alpha, \beta[$ donc $]\alpha, \beta[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini (seuls les termes de rang $1, 2, \dots n_0 - 1$ peuvent être en dehors de cet intervalle)
et ce pour un intervalle $]\alpha, \beta[$ (contenant 0) quelconque, donc $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0

## 2.2 Limites infinies

Définition : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ (ou **diverge vers** $+\infty$) si :

« tout intervalle de type $[A, +\infty[$ $(A > 0)$, contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini d'entre elles ».

On notera alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ (ou **diverge vers** $-\infty$) si :

« tout intervalle de type $]-\infty, A]$ $(A < 0)$, contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini d'entre elles ».

On notera alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $u_n \to -\infty$

Exemples :
- la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- la suite $\left(\ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

⚠ une suite divergente ne tend pas forcément vers $+\infty$, cf. **le** contre-exemple : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème : si une suite admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.

# 3 Limites de référence

Propriétés :
- pour $\alpha > 0$, $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- pour $a > 0$, $e^{an} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $(\ln(n))^a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  en particulier $e^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exemples :
- $n^{\frac{3}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\quad n^{-7} = \dfrac{1}{n^7} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $e^{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\quad e^{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$(\ln(n))^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\quad (\ln(n))^{\frac{1}{3}} \to +\infty$

Propriétés - limites des suites géométriques : soit $q \in \mathbb{R}$
- si $q > 1$, $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- si $-1 < q < 1$, i.e. $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- si $q = 1$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Exemples :
- $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\quad \left(\dfrac{5}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $\left(\dfrac{1}{7}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\quad \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

# 4 Propriétés sur limites

## 4.1 Propriétés des suites convergentes et opérations sur les limites

| | |
|---|---|
| Propriétés : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite $\ell$, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ | Remarque : en posant $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$, c'est évident avec la définition de la limite. |
| Propriétés : si les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ | avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $u_{2n} = \dfrac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$ or $u_{2n} \to 0$ et $u_{2n+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$ |

| | |
|---|---|
| Propriétés - opérations sur les limites des suites convergentes : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites $\ell$ et $\ell'$, alors :<br>• $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell + \ell'$<br>• $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \times \ell'$<br>• si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$ et $\ell' \neq 0$ alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$<br>en particulier dans ce cas, $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{1}{\ell'}$ | Exemples :<br>• $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{n+1}{n} \to 1$<br>• $\dfrac{n+1}{4n} \to \dfrac{1}{4} \times 1 = \dfrac{1}{4}$<br>• $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 5}{\frac{1}{n} + 3} \to \dfrac{-5}{2} = -\dfrac{5}{2}$ car $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 5 \to -5$ et $\dfrac{1}{n} + 3 \to 3$ |

| |
|---|
| Propriétés - opérations plus générales sur les limites : cf. fin du poly |

Remarque : une suite convergente est bornée mais la la réciproque est fausse (quel contre-exemple ?).

## 4.2 Limites et inégalités

| | |
|---|---|
| Propriété : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive (i.e. telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$) qui converge vers $\ell$, alors $\ell \geqslant 0$ | Remarque : si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on ne peut pas pour autant en déduire $\ell > 0$, comme le montre : $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$, dont la limite est 0 |
| Propriété : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $a < \ell < b$, alors à partir d'un certain rang $a \leqslant u_n \leqslant b$ | Par exemple avec une suite qui converge vers 1, tous ses termes sont compris entre 0 et 2 à partir d'un certain rang. |
| Propriété (passage à la limite dans les inégalités larges) :<br>soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergent vers $\ell$ et $\ell'$ et telles que<br>$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$ | utile quand on ne connait pas la limite<br>par exemple on peut montrer que la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$ est convergente et que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \ell \leqslant 1$ |
| Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) :<br>soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$<br>• cas convergent<br>si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel $\ell$<br>alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et elle converge vers $\ell$<br>• cas divergent (juste avec $u_n \leqslant v_n$)<br>▷ si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$<br>▷ si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ | Exemples :<br>• pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$<br>on montre d'abord que $\dfrac{n}{4n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2}$<br>alors $u_n \to 0$ car $\dfrac{1}{4n} \to 0$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$<br>• on pose $v_n = n^2 + e^{\frac{1}{n+1} + \ln n}$<br>on peut alors se contenter de dire $u_n \leqslant v_n$ avec $u_n = n^2$ et $u_n \to +\infty$ ce qui entraine $v_n \to +\infty$ |

Théorème de la limite monotone : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :
  - ▷ cas 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  - ▷ cas 2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
  - ▷ cas 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  - ▷ cas 2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Exemple : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! \geqslant 2^n$ (à montrer par récurrence).
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geqslant 2^{n-1} \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ et donc $u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$

or $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 2$ et de fait $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus elle est croissante $(u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!})$ donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

## 5 Croissances comparées

Propriétés - croissances comparées : soit $a > 0$, $b > 0$ et $q > 1$, alors

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{q^n} = 0$ (en part. : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{e^{an}} = 0$) c) de fait $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{q^n} = 0$

Remarque : on peut inverser les limites. Par ailleurs, on résume en écrivant $(\ln n)^a << n^b << q^n$

Exemples : $u_n = \frac{\ln(n) - e^n}{\sqrt{n}}$ $v_n = \frac{e^n - n^2}{2^n}$ $w_n = \frac{e^{-n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\ln(n)}}$

$u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{e^n}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \to -\infty$ ; $v_n = \left(\frac{e}{2}\right)^n - \frac{n^2}{2^n}$ donc $v_n \to +\infty$ et $w_n = \frac{ne^{-n}+1}{\frac{1}{n} + \frac{n}{\ln(n)}}$ donc $w_n \to 0$

## 6 Suites adjacentes

Définition : deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si
1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante 2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante 3) $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Exemple : $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$

Propriété : deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Exemple : soit $u$ et $v$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Montrer que $u$ et $v$ sont adjacentes. Conclure.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (vu plus haut) et $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \leqslant 0$ (pour $n > 0$) de plus $u_n - v_n = -\frac{1}{(n+1)!}$ donc $u_n - v_n \to 0$

donc $u$ et $v$ sont adjacentes et de fait elles convergent vers une même limite (qui vaut $e$).

# 7 Des méthodes officielles

## 7.1 Déterminer la limite d'une suite récursive convergente

*Pour s'entrainer : exercices 3, 4, 5, 7, 8 et 15*

L'idée : « **la limite est forcément un point fixe** » $(f(\ell) = \ell)$.

Exemple : soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 \in [0;1]$
On peut démontrer que cette suite est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell$ sa limite.

D'après les propriétés sur les limites (**4.1**) : $u_n \to \ell \Rightarrow u_{n+1} \to \ell$

et de plus $u_n - u_n^2 \to \ell - \ell^2$ **donc en passant à la limite dans l'égalité**, on obtient :
$\ell = \ell - \ell^2$ et de fait $\ell^2 = 0$

et finalement ici $\ell = 0$

## 7.2 Bien utiliser les croissances comparées

*Pour s'entrainer : exercice 10*

Le recours à cette méthode n'est pas toujours indispensable, mais elle est efficace pour la justification.

L'idée : « **on factorise par les plus gros** ».

Exemple : que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}}$ ?

Une rapide analyse nous permet de comprendre que les termes dominants qui vont déterminer la limite sont $n^2$ au numérateur et $2^n$ au dénominateur, mais il est trop rapide d'écrire d'emblée :
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

On factorise donc par $n^2$ au numérateur et $2^n$ au dénominateur :

$$\frac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}} = \frac{n^2\left(1 + \frac{\ln n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{2^n\left(1 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{(\ln n)^{12}}{2^n}\right)}$$

d$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$ d'après le théorème des gendarmes
les croissances comparées nous permettent alors de dire :
d'une part $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^2} = 0$ (et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$) et donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{\ln n}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 1$
d'autre part $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{2^n} = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^{12}}{2^n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{n^5}{2^n} + \dfrac{(\ln n)^{12}}{2^n} = 1$
de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$ et donc par opérations sur les limites $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}} = 0 \times \dfrac{1}{1} = 0$

## 7.3 Multiplication par le conjugué

Calculer la limite de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

On appelle conjugué de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ l'expression $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
La multiplication fait apparaitre une identité remarquable qui permet de simplifier la différence des racines : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

donc $u_n = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

donc $u_n = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ et donc $u_n \to 0$

**Synthèse : opérations générales sur les limites de suites**

Cette section complète la section éponyme du cours : **4.1**

Dans toute la section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles et $\ell$ et $\ell'$ sont deux nombres réels.

Dans certains cas, on ne peut donner un résultat général, on parlera alors de « forme indéterminée », que l'on abrègera en « FI ».

a) Limite d'une somme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

b) Limite d'un produit

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell>0$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $\ell<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$ | $\ell\times\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI | FI |

c) Limite d'un quotient, dans le cas où $\ell'\neq 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, v_n\neq 0$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ | $\ell\neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\ell'$ | $\ell'$ | $\infty$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $0$ | $\infty$ | $\infty$ | FI | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | FI |

**Attention** au signe de $v_n$ dans les cas où elle tend vers 0. Les formules ne sont valables que si $(v_n)$ est de signe constant à partir d'un certain rang (cf. $v_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$).

**Conclusion** : les 4 types de formes indéterminées sont $+\infty-\infty$ ; $+\infty\times 0$ ; $\dfrac{0}{0}$ ; $\dfrac{\infty}{\infty}$

Exemples sur les formes indéterminées : ou pourquoi ne peut-on pas conclure systématiquement ?

Avec l'addition :

Si $u_n=n^2$ et $v_n=n$
alors $u_n\to+\infty$ et $v_n\to+\infty$
et dans ce cas $u_n-v_n=n^2-n=n(n-1)$
donc pour $n>1, u_n-v_n\geqslant n$
et donc $u_n-v_n\to+\infty$
plus simplement avec de suites linéaires :
$u_n=4n,\quad v_n=3n$ et $u_n-v_n\to+\infty$
$u_n=n+1,\quad v_n=n$ et $u_n-v_n\to 1$
$u_n=2n,\quad v_n=7n$ et $u_n-v_n\to-\infty$

Avec la multiplication (ou la division) :

Si $u_n=n^2$ et $v_n=\dfrac{1}{n}$ alors $u_n\to+\infty$ et $v_n\to 0$
et $u_nv_n=n$ donc $u_nv_n\to+\infty$
en modifiant un peu :
$u_n=n$ et $v_n=\dfrac{1}{n^2}$ alors $u_nv_n=\dfrac{1}{n}$ donc $u_nv_n\to 0$
enfin avec $u_n=3n+5$ et $v_n=\dfrac{1}{n+2}$
alors $u_nv_n=\dfrac{3n+5}{n+2}=\dfrac{3n}{n}\times\dfrac{1+\frac{5}{3n+2}}{1+\frac{1}{n}}$, $u_nv_n\to 3$