Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais parler de :
- parties d'un ensemble, d'inclusion ☐
- réunion, d'intersection ☐
- complémentaire (et complémentaire d'une union et d'une intersection) ☐
- produit cartésien ☐

Définitions :
- un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques (nombres, fonctions, points du plan...).
- deux **ensembles sont égaux** si ils sont formés des mêmes éléments.
- l'**ensemble vide** est l'unique ensemble ne contenant aucun élément, il est noté $\emptyset$

Exemples :
- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels contient les nombres entiers à partir de zéro ;
- $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

Remarque : les éléments d'un ensemble sont donnés « en vrac »(il y n'y pas de notion d'ordre). Par exemple $\{1,3\} = \{3,1\}$

Définitions : soit A et B deux ensembles. On dit que B **est inclus dans** A (ou que B **est un sous-ensemble** de A) lorsque tout élément de B est aussi un élément de A, on note alors $B \subset A$

si B n'est pas inclus dans l'ensemble A, on note $B \not\subset A$

Remarques :
- $B \subset A$ s'écrit : $\forall x \in B, \quad x \in A$
- étant donné A un ensemble, on a toujours $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$

Exemples :
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_9[X] \subset \mathbb{R}_{17}[X] \subset \mathbb{R}[X]$

Méthode pour démontrer que $A \subset B$:
on écrit : « soit $x \in A$ » et par une suite de déduction on aboutit à « alors $x \in B$ »

Par exemple montrer que $F \subset E$
où $F = \{P(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ et $E = \{f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction paire}\}$
soit $P \in F$, alors P est une fonction polynomiale, donc P est définie sur $\mathbb{R}$
de plus $\forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = (-x)^{2n} = ((-x)^2)^n = (x^2)^n = x^{2n} = P(x)$
donc P est paire (et définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) donc $P \in E$
d'où $F \subset E$

Propriété :

$A = B$ équivaut à $A \subset B$ et $B \subset A$

Remarque (pour la rédaction) : pour montrer que les ensembles A et B sont égaux, généralement on démontre successivement les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$

Deux façons de définir un ensemble :
- on peut énumérer les éléments de l'ensemble (on le définit alors « en extension ») : $\{1, 2, 5, 9\}$. C'est plus difficile pour un ensemble infini, par exemple $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- à l'aide d'une propriété commune à tous ses éléments de l'ensemble (on le définit alors « en compréhension ») :
  - ▷ $\{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 2\} = [2, +\infty[$
  - ▷ l'ensemble des entiers naturels pairs s'écrit : $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$
  - ▷ montrer que $\{3x + 1 \,;\, x \in [0, 1]\,\} \subset [1, 5[$

Définitions et propriété :

soit E un ensemble et $A \subset E$ (donc A est un sous-ensemble de E, on dit aussi que A est une **partie de** E)

- on appelle **ensemble des parties de** E, et on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble dont les éléments sont les parties de E
- $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)$

Remarques :

- il existe donc des ensembles dont les éléments sont eux-même des ensembles.
- $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

Exemples :

- soit $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \emptyset, E\}$
- en probabilité, un événement est un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$

Définition et propriété :

soit E un ensemble, et A une partie de E. On appelle **complémentaire** de A (dans E), et on note $\bar{A}$ ou $C_E A$ le sous-ensemble de E formé des éléments qui n'appartiennent pas à A

C'est-à-dire : $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$

de fait $x \in \bar{A} \iff x \notin A$

Exemples :

- le complémentaire de $[2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est $]-\infty, 2[$
- soit P l'ensemble des naturels pairs. Le complémentaire de P dans $\mathbb{N}$ est $\bar{P} = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$
- soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{1, 4\}$. Le complémentaire dans E de A est $\bar{P} = \{2, 3, 5, 6\}$
- soit E un ensemble, alors $\bar{E} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$
- soit E un ensemble, et $A \subset E$, alors $\bar{\bar{A}} = A$

Définition :

on appelle **intersection** de A et de B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Autrement dit pour $x \in E$

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

Exemples :

- soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, alors $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
- soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{-3, 7, 9\}$ alors $A \cap B = \emptyset$
- soit $A = \mathbb{Z}$ et $B = [-\pi, \sqrt{2}[$ alors $A \cap B = [\![-3, 1]\!]$

Définition : on dit que deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$

Exemple : $]-\infty, 1]$ et $]2, \pi]$ sont disjoints.

Remarque : A et $\bar{A}$ sont toujours disjoints.

Définition :

on appelle **réunion** de A et de B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B

Autrement dit, pour $x \in E$

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Exemples :

- soit $A = [-1, \pi]$ et $B =]1, 5]$, alors $A \cup B = [-1, 5]$ et $A \cap B =]1, \pi]$
- soit $A = [1, 2] \cup]\pi, \pi^2]$, et $B = [0, 2\pi]$, alors $A \cup B = [0, \pi^2]$ et $A \cap B = [1, 2] \cup]\pi, 2\pi]$

Propriétés :

Intersection : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ $\quad A \cap E = A \quad$ si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$

Union : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \quad A \cup E = E \quad A \cup \bar{A} = E \quad$ si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$

Complémentaire, union et intersection : $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Définition : soit E et F deux ensembles, on appelle **produit cartésien** de E par F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples d'éléments de E et de F pris dans cet ordre :

$$E \times F = \{(a, b) \,;\, a \in E \quad \text{et} \quad b \in F\}$$

La définition se généralise. Par exemple, $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble $\{(x, y, z), x \in E_1, y \in E_2, z \in E_3\}$

Exemples :

- soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3, 7\}$, alors $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 7)\}$ et $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (7, 1), (7, 2)\}$
- l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^2$. Il s'agit de l'ensemble des couples de nombres réels. Les éléments $(5, \ln(3))$ et $(\ln(3), 5)$ de $\mathbb{R}^2$ sont différents.
- soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{7, 9\}$ déterminer $A \times B \times C$