

Corrigé de l'exercice non abordé en classe.

Exercice 10

On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + 2y, -x + 3y) \quad \text{et} \quad (a, b) \mapsto \left(\frac{3a - 2b}{5}, \frac{a + b}{5} \right)$$

Montrer que f est une bijection entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^2 et que g est la réciproque de f .

f et sa réciproque, g , nous sont données, on va donc calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ pour démontrer la bijectivité et le fait que g est bien la réciproque.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + 2y, -x + 3y)$

donc $(g \circ f)(x, y) = \left(\frac{3(x + 2y) - 2(-x + 3y)}{5}, \frac{(x + 2y) + (-x + 3y)}{5} \right)$ en remplaçant a par $x + 2y$ et b par $-x + 3y$ dans l'expression de $g(a, b)$

$$\text{donc } (g \circ f)(x, y) = \left(\frac{3x + 6y + 2x - 6y}{5}, \frac{x - x + 2y + 3y}{5} \right) = \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5} \right) = (x, y)$$

De même pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (on peut prendre (x, y) indifféremment), on calcule :

$$(f \circ g)(a, b) = f(g(a, b)) = f\left(\frac{3a - 2b}{5}, \frac{a + b}{5}\right)$$

donc $(f \circ g)(a, b) = \left(\frac{3a - 2b}{5} + 2 \times \frac{a + b}{5}, -\frac{3a - 2b}{5} + 3 \times \frac{a + b}{5} \right)$ en remplaçant x par $\frac{3a - 2b}{5}$ et y par $\frac{a + b}{5}$ dans l'expression de $f(x, y)$

$$\text{donc } (f \circ g)(a, b) = \left(\frac{3a - 2b + 2a + 2b}{5}, \frac{-3a + 2b + 3a + 3b}{5} \right) = \left(\frac{5a}{5}, \frac{5b}{5} \right) = (a, b)$$

Comme attendu, on a montré que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (g \circ f)(x, y) = (x, y)$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (f \circ g)(a, b) = (a, b)$, autrement dit $f \circ g = g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ (il s'agit de l'application qui à un élément de \mathbb{R}^2 associe lui-même).

donc par propriété f est bijective et sa bijection réciproque est g .