Plan de travail

Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Limites de référence et opérations	1, 2	
Théorèmes de la limite monotone	3, 4, 5, 7, 15	6, 8, 16
Comparaison	9, 10, 11	12, 18
Suites adjacentes	13, 14	17

Exercice 1

Etudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes.

1. $u_n = n^3 + 2n - 9$

2. $u_n = -1 + \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{6}{n}$

3. $u_n = \dfrac{1}{3 - e^{2n}}$

4. Pour $n \geqslant 2$, $u_n = 2^n \left(-1 + \dfrac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$

5. Pour $n \geqslant 2, u_n = \dfrac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln(n))^2 \times 5^n}$

6. $u_n = n^{-3} + n^5 + 6 + e^{-n}$

7. $u_n = \dfrac{2 + \frac{1}{\ln(n)}}{-1 + \frac{1}{n}}$

8. $u_n = -n^3 - 3n^2 - 2n + 1$

9. $u_n = \sqrt{n} - 1$

10. $u_n = \dfrac{-1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{e^{-n} + \frac{1}{n^2}}$

Exercice 2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\quad u_0 = 0 \quad$ et $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{3 - u_n}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 < u_n < 1$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

a. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

b. En déduire une expression de u_n en fonction de n puis la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^4$

1. Etudier la monotonie de u

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1$

3. Montrer que si la suite u converge vers un réel ℓ, alors $\ell = 0$

4. En déduire la limite de la suite u

Exercice 4 - monotonie et limite

Soit u, la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + u_n^2)$

1. Déterminer la monotonie de la suite.

2. Montrer que la suite u ne peut pas être majorée. En déduire la limite de u_n quand $n \to +\infty$

Exercice 5 - suite récurrente non-linéaire

Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 > 0$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n > 0$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$ et déterminer la limite de la suite u
3. Déduire de l'inégalité précédente la monotonie de u, puis retrouver sa limite.

Exercice 6

Soit u la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\quad u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + e^{-k}\right)$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$
2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on définit $f(x) = \ln(1+x) - x$
   a. Etudier les variations de la fonction f
   b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leqslant x$
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$
4. Montrer que la suite u est croissante.
5. Montrer que la suite u est convergente.

Exercice 7 - suites et fonctions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$ et (u_n) la suite définie par :
$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Dresser le tableau de variations (complet) de f et résoudre l'équation $f(x) = x$ (points fixes).
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, puis déterminer la monotonie de la suite (u_n)
3. Conclure quant à la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.
4. Représenter alors la fonction f, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite.
5. Représenter puis étudier de même la suite (v_n) définie par $v_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$

Exercice 8 - suites et fonctions le retour

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Dresser le tableau de variations (complet) de f, puis montrer que $\forall x \geqslant 1, f(x) - x \leqslant 0$
   Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite. Qu'en est-il pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$

Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Exercice 10

Etudier la limite de la suite u définie par :

1. $u_n = \dfrac{-3n^2+8}{n+7}$
2. $u_n = \dfrac{2n+1}{1-4n}$
3. $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$
4. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ (avec $0<b<a$)
5. $u_n = \dfrac{4+(-1)^n}{n^2}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
6. $u_n = \dfrac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
7. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2+e^{-n}\ln(n)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
8. $u_n = \dfrac{\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}$
9. $u_n = \dfrac{(\ln(n))^2}{n^{3/2}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
10. $u_n = \sqrt{n^2+2}-n$ pour $n\in\mathbb{N}$
11. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}+n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+6$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice 11

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n=\dfrac{5^n}{n!}$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3
2. Montrer que u est décroissante à partir du rang 4
3. Montrer que pour $n\geqslant 5$, $u_{n+1}\leqslant \dfrac{5}{6}u_n$
4. Soit $v=(v_n)_{n\geqslant 5}$ la suite géométrique de premier terme $v_5=u_5$, et de raison $\dfrac{5}{6}$
   Montrer que pour tout $n\geqslant 5$, $0\leqslant u_n\leqslant v_n$
5. Montrer que la suite u converge et préciser sa limite.

Exercice 12 - un peu plus technique

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\quad u_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!$

1. Soit n entier tel que $n\geqslant 3$. Pour k entier tel que $1\leqslant k\leqslant n-2$, encadrer le réel $\dfrac{k!}{n!}$
2. Soit n entier tel que $n\geqslant 3$. Montrer que $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}k!\leqslant\dfrac{1}{n-1}$
3. Soit n entier tel que $n\geqslant 3$. Exprimer u_n à l'aide de $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}k!$
4. Soit n entier tel que $n\geqslant 2$. Exprimer u_n à l'aide de $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k!$
5. Montrer que la suite u converge vers 1

Exercice 13 - Exemples de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 14

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

Montrer que ces deux suites sont convergentes, de même limite.

Exercice 15

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$

1. Etudier la monotonie de u
2. Montrer que u ne peut pas converger vers un réel ℓ
3. Que peut-on en déduire concernant la limite de la suite u ?
4. En considérant, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat de la question **3**.

Pour continuer à s'entrainer

Exercice 16

Soit u la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, à l'aide d'un changement d'indice.
2. Montrer que u est strictement croissante.
3. Montrer que u converge.

Exercice 17

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes, de même limite.

Exercice 18

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

On suppose que u est croissante. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant u_n$