Eléments de corrigé

1. Soit P la fonction définie par $P(x) = \dfrac{x^2+11x-3}{2x-8}$.
   Alors P est un polynôme ?

   ☐ Oui ☒ Non

   Il s'agit en fait d'une fraction rationnelle (fraction de polynômes) que nous verrons prochainement. Celle-ci n'est pas défini pour $x = 4$ par exemple.

2. Soit P la fonction définie par $P(x) = (x^2+11x)^5$. Alors P est un polynôme ?

   ☒ Oui ☐ Non

   Il s'agit bien de puissances (entières et positives) de x multipliées par des coefficients réels, ce que l'on visualiserait de manière évidente avec la forme développée.

3. Soit P la fonction définie par $P(x) = (\ln 3)x^4 + (\ln 2)x^2 + (\ln 5)$. Quel est l'ensemble de définition de P ?

   ☐$[0;+\infty[$ ☐$]0;+\infty[$ ☒$\mathbb{R}$ ☐$]1;+\infty[$

   C'est un polynôme, il est donc défini sur $\mathbb{R}$.

4. Soit P un polynôme de degré n qui s'écrit $P(x) = (x-a)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$. Que vaut $P(a)$?

   L'écriture factorisée est synonyme de a est racine de P, donc $P(a) = 0$. Ce que l'on voit de manière évidente en remplaçant x par a.

5. Soit P la fonction définie par $P(x) = x^5 - 32$. Alors P peut s'écrire (Q est un polynôme de degré 4)

   ☒$P(x) = (x-2)Q(x)$ ☐$P(x) = (x+2)Q(x)$
   ☐$P(x) = (x-32)Q(x)$ ☐$P(x) = (x - \frac{32}{5})Q(x)$

   2 est une racine de P ce qui entraine cette factorisation (ce n'est pas le cas de $-2, 32$ ou $\frac{32}{5}$).

6. Soit P la fonction définie par $P(x) = x^3 - 1$. Alors P peut s'écrire $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2. Que vaut $Q(x)$?

   ☐$Q(x) = x^2$ ☒$Q(x) = 1 + x + x^2$ ☐$Q(x) = x^2 - 1$ ☐$Q(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

   On le retrouve en développant avec les différentes réponses proposées (on pourrait le trouver en écrivant $Q(x) = ax^2 + bx + c$ puis en identifiant les coefficients après développement).

7. Soit P la fonction définie par $P(x) = -2x^{11} + 9x^7 + 100$. Que vaut P' le polynôme dérivé de P ?

   ☐$P'(x) = -2x^{10} + 9x^6$ ☐$P'(x) = -11x^{10} + 7x^6 + 20$
   ☒$P'(x) = -22x^{10} + 63x^6$ ☐$P'(x) = -22x + 63x$

   On dérive terme sachant que la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$.

8. Soit P un polynôme de degré 9 qui s'écrit sous la forme $P(x) = (x^2+4x-5)Q(x)$ où Q est un polynôme. Quel est le degré de Q ?

   D'après la formule du degré d'un produit : $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(X^2+4X-5)$ donc $9 = \deg(Q) + 2$ donc $\deg(Q) = 7$

9. Soit P la fonction définie par $P(x) = (x^2+11x)^5$. Quel est le degré de P ?

   C'est une extension de la formule vue plus haut : $\deg(P^n) = n\deg(P)$, ici $\deg(P) = 5 \times 2 = 10$

10. P est un polynôme de degré 5. On pose $Q(x) = xP(x)$. Quel est le degré de Q', le polynôme dérivé de Q ?

Q est donc de degré 6 (produit de polynômes de degrés 1 et 5), donc $\deg(Q') = 5$.