ECG 1 - maths appli. **Devoir en temps libre n°5** Pour le 6 janvier 2025

Corrigé *Total sur 34 points*

Exercice 1 *12 points*

On s'intéresse aux résultats d'un étudiant lors d'une épreuve de mathématiques. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- si l'étudiant a réussi la question n alors il a la probabilité $\dfrac{3}{4}$ de réussir la suivante
- si l'étudiant n'a réussi la question n alors il a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de réussir la suivante

On suppose que l'étudiant réussit la première question et on note r_n la probabilité que l'étudiant réussisse la question n

1. Calculer r_2 et r_3 *1,5 points*

Par hypothèse, l'étudiant réussit la première question, il a donc trois chances sur 4 de réussir la deuxième, i.e. $r_2 = \dfrac{3}{4}$ puis il y a « deux façons » de réussir la troisième question, soit en réussisssant la deuxième, soit en la ratant, autrement dit, avec la « petite » formule des probabilités totales, et en notant R_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'événement : « l'étudiant réussit la question n » alors $P(R_3) = P(R_2)P_{R_2}(R_3) + P(\overline{R_2})P_{\overline{R_2}}(R_3)$
i.e. $r_3 = r_2 \times \dfrac{3}{4} + (1 - r_2) \times \dfrac{1}{2}$ et donc $r_3 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{16} + \dfrac{2}{16} = \dfrac{11}{16}$
on a utilisé $P_{R_2}(R_3) = \dfrac{3}{4}$ ce qui correspond à la probabilité de réussir une question (ici la troisième) sachant que la précédente a été réussie (ici la deuxième). Et de même $P_{\overline{R_2}}(R_3)$ ce qui correspond à la probabilité de réussir une question (ici la troisième) sachant que la précédente n'a pas été réussie (ici la deuxième)

2. Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre r_{n+1} et r_n *1,5 points*

Comme à la question précédente, avec la « petite » formule des probabilités totales :
$P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$
i.e. $r_{n+1} = r_n \times \dfrac{3}{4} + (1 - r_n) \times \dfrac{1}{2}$ et donc $r_{n+1} = \dfrac{3}{4}r_n - \dfrac{1}{2}r_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{2}$ comme plus haut, on a utilisé $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ ce qui correspond à la probabilité de réussir la $n+1^{\text{ème}}$ question sachant que la précédente (la $n^{\text{ème}}$) a été réussie ; et de même $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ ce qui correspond à la probabilité de réussir la $n+1^{\text{ème}}$ question sachant que la précédente (la $n^{\text{ème}}$) n'a pas été réussie.

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, r_n en fonction de r_1 *2 points*

D'après le résultat précédent, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique, on va donc l'expliciter selon la méthode habituelle. Dans un premier temps, on cherche le point fixe : $\alpha = \dfrac{1}{4}\alpha + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$
on introduit alors la suite auxiliaire définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = r_n - \dfrac{2}{3}$
alors pour $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = r_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}$ d'après **2.**
donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}r_n - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}\left(v_n + \dfrac{2}{3}\right) - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}v_n$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = v_1 \dfrac{1}{4^{n-1}}$
or $v_1 = r_1 - \dfrac{2}{3} = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ car $r_1 = 1$ par hypothèse donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^{n-1}}$
or $r_n = v_n + \dfrac{2}{3}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^{n-1}} = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{1}{4^{n-1}}\right)$

4. Emettre une conjecture sur la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat. *1 point*

Le terme 4^{n-1} tend vers $+\infty$ (et même rapidement), donc r_n va tendre vers $\dfrac{2}{3}$ (et même rapidement) i.e. au bout de quelques questions déjà (4 ou 5) la probabilité de réussir la question n sera proche de $\dfrac{2}{3}$

5. Les événements « l'étudiant réussit la question n » et « l'étudiant réussit la question $n+1$ » sont-ils indépendants ? *1,5 points*

Concrètement on pressent que non, puisque, d'après l'énoncé, la réussite d'une question dépend de la réussite de la précédente. Mathématiquement il faut le justifier en montrant que $P(R_{n+1}) \neq P_{R_n}(R_{n+1})$
or, comme vu plus haut $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ et d'après la question précédente $P(R_{n+1}) = r_{n+1} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^n}$
donc $P(R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1}) \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^n} \Leftrightarrow 12 \times \dfrac{3}{4} = 12 \times \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4^n}\right) \Leftrightarrow 9 = 8 + 4 \times \dfrac{1}{4^n} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{4^{n-1}} \Leftrightarrow$ $4^{n-1} = 1 \Leftrightarrow n = 1$
finalement ces événements sont dépendants pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sauf $n = 1$, i.e. R_1 et R_2 sont indépendants, il s'agit en fait d'un cas particulier (car la première question est toujours réussie) où $r_2 = P(R_2) = \dfrac{3}{4}$

6. On s'intéresse maintenant à l'enchainement des 5 premières questions

a. quelle est la probabilité que l'étudiant les réussisse toutes ? *1 point*

On s'intéresse donc à l'événement $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5$ et d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3)P_{R_1\cap R_2\cap R_3}(R_4)P_{R_1\cap R_2\cap R_3\cap R_4}(R_5) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_2}(R_3)P_{R_3}(R_4)P_{R_4}(R_5) \end{aligned}$$

car la réussite d'une question ne dépend que de la précédente

de plus $P(R_1) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ finalement $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{81}{256}$

b. quelle est la probabilité que l'étudiant n'en rate qu'une seule ? *2 points*

L'étudiant réussit toujours la première question, donc s'il en rate une, c'est forcément une des suivantes et on s'intéresse donc à l'événement, que l'on notera A :

$$\left(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5\right) \cup \left(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap R_4 \cap R_5\right) \cup \left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{R_4} \cap R_5\right) \cup \left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap \overline{R_5}\right)$$

alors par incompatibilité (on ne peut à la fois réussir et ne pas réussir une question) :

$$P(A) = P\left(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5\right) + P\left(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap R_4 \cap R_5\right) + P\left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{R_4} \cap R_5\right) + P\left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap \overline{R_5}\right)$$

or d'après la formule des probabilités composée (dans un premier temps) et parce que la réussite d'une question ne dépend que de la précédente (dans un deuxième temps), puis avec les données de l'énoncé

$$\begin{aligned} P\left(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5\right) &= P(R_1)P_{R_1}(\overline{R_2})P_{R_1\cap\overline{R_2}}(R_3)P_{R_1\cap\overline{R_2}\cap R_3}(R_4)P_{R_1\cap\overline{R_2}\cap R_3\cap R_4}(R_5) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(\overline{R_2})P_{\overline{R_2}}(R_3)P_{R_3}(R_4)P_{R_4}(R_5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{128} \\ P\left(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap R_4 \cap R_5\right) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(\overline{R_3})P_{R_1\cap R_2\cap\overline{R_3}}(R_4)P_{R_1\cap R_2\cap\overline{R_3}\cap R_4}(R_5) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_2}(\overline{R_3})P_{\overline{R_3}}(R_4)P_{R_4}(R_5) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{128} \\ P\left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{R_4} \cap R_5\right) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3)P_{R_1\cap R_2\cap R_3}(\overline{R_4})P_{R_1\cap R_2\cap R_3\cap\overline{R_4}}(R_5) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_2}(R_3)P_{R_3}(\overline{R_4})P_{\overline{R_4}}(R_5) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{128} \\ P\left(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap \overline{R_5}\right) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3)P_{R_1\cap R_2\cap R_3}(R_4)P_{R_1\cap R_2\cap R_3\cap R_4}(\overline{R_5}) \\ &= P\left(R_1\right)P_{R_1}(R_2)P_{R_2}(R_3)P_{R_3}(R_4)P_{R_4}(\overline{R_5}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{256} \end{aligned}$$

d'où $P(A) = 3 \times \dfrac{9}{128} + \dfrac{27}{256} = \dfrac{27}{128} + \dfrac{27}{256} = \dfrac{54}{256} + \dfrac{27}{256} = \dfrac{81}{256}$

7. Que réalise le programme Python ci-dessous (on prendra le soin de détailler la réponse) ?

```python
import numpy.random as rd
R=[1]
r=1
for i in range(2,6):
    if r==1:
        a=rd.randint(1,5)
        if a==4 :
            r=0
    else :
        a=rd.randint(1,3)
        if a==1 :
            r=1
    R.append(r)
print(R, sum(R))
```

Le programme simule la réalisation de 5 questions consécutives selon le protocole décrit dans l'exercice et affiche la liste des « réussites aux questions », où 1 désigne la réussite et 0 l'échec. Il affiche aussi le nombre de quesions réussies. *1,5 points*

Pour cela il créé la variable `r` qui contient 1 si la question est réussie et 0 sinon. A chaque question, la valeur du `r` est mise à jour. Soit si `r` vaut 1, en tirant un nombre entier entre 1 et 4 et r garde alors la valeur 1 si le nombre tiré n'est pas quatre. Ce qui arrive 3 fois sur quatre (on simule donc comme cela le fait de réussir une question sachant que la précédente est réussie, avec une probabilité de $\dfrac{3}{4}$). L'autre cas correspond à la situation où la question i a été ratée.

Exercice 2 *6 points*

On définit l'application h par $h = \exp \circ \exp$

1. Déterminer $\mathscr{D}_h$, l'ensemble de définition de h, puis l'expression de $h(x)$ *0,5 point*

Il n'y a pas de contrainte car l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ (on peut toujours faire l'exponentielle de l'exponentielle) donc $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (\exp \circ \exp)(x) = \exp(\exp(x)) = e^{e^x}$

2. Déterminer $h\langle[0, +\infty[\rangle$ *(on cherchera à justifier la limite en $+\infty$)* *2 points*

Il est nécessaire dans un premier temps d'étudier les variations

pour $x \in \mathbb{R}, h$ peut s'écrire $h(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = e^x$ (et donc $u'(x) = e^x$)

donc $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ (car la dérivée d'exponentielle est elle-même) et donc $h'(x) = e^x e^{e^x}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > 0$ et de fait h est strictement croissante donc $h\langle[0, +\infty[\rangle = \left[h(0), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[$

bien que nous n'ayons pas encore vu les limites de fonctions, nous savons que l'exponentielle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, de fait $h(x)$ va tendre vers « $\exp(+\infty)$ » (cette notation n'est pas rigoureuse) quand x tend vers $+\infty$ de plus $h(0) = e^{e^0} = e^1 = e$ d'où $h\langle[0, +\infty[\rangle = [e, +\infty[$

3. Montrer que h n'est pas surjective de $\mathscr{D}_h$ dans $\mathbb{R}$ *0,5 point*

Il est évident que h ne prend que des valeurs strictement positives (c'est le résultat d'une exponentielle), donc $h(x) = -1$ n'admet pas de solution (de même que $h(x) = y$ pour n'importe quel $y \leqslant 0$).

4. Montrer que h est injective. *1 point*

On peut le justifier avec la stricte monotonie (croissance ici) de h, en effet si $x \neq x'$, alors soit $x < x'$ et dans ce cas $h(x) < h(x')$; soit $x > x'$ et dans ce cas $h(x) > h(x')$; dans tous les cas $h(x) \neq h(x')$ ce qui signifie que h est injective.

Option B - méthode classique : soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x) = h(x')$ alors $e^{e^x} = e^{e^{x'}}$
donc $\ln\left(e^{e^x}\right) = \ln\left(e^{e^{x'}}\right)$ (il s'agit de nombres strictement positifs)
donc $e^x = e^{x'}$ et en composant à nouveau par ln on trouve $x = x'$, ce qui signifie que h est injective

5. Démontrer que h est une bijection de $\mathscr{D}_h$ dans $]1, +\infty[$ et donner sa bijection réciproque. *2 points*

A nouveau la méthode officielle : soit $y \in]1, +\infty[$, alors pour $x \in \mathscr{D}_h$
$h(x) = y \Leftrightarrow e^{e^x} = y \Leftrightarrow \ln\left(e^{e^x}\right) = \ln(y)$ car il s'agit de nombres strictement positifs, donc on peut composer par ln (et exp dans l'autre sens, donc $h(x) = y \Leftrightarrow e^x = \ln(y) \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(\ln(y))$
la nouvelle composition par ln est licite par $y > 1 \Rightarrow \ln(y) > \ln(1)$ (car la fonction ln est strictement croissante), i.e. $\ln(y) > 0$, d'où finalement $h(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(\ln(y))$
comme $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$, il n'y a pas à vérifier que l'antécédent trouvé est bien dans $\mathscr{D}_h$
finalement $\forall y \in]1, +\infty[$, l'équation $h(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que h est bijective, de plus : $h^{-1} : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(\ln(y)) \end{array}$

Exercice 3 - fonction et suite *16 points*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 3}$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'ensemble de définition de f *0,5 point*

f est définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur ne s'annule pas. En effet il s'agit d'un polynôme du second degré donc le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$, ce polynôme n'a donc pas de racine.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ *1 point*

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2 + 2x + 3} = x \Leftrightarrow x = x(x^2 + 2x + 3)$ car $x^2 + 2x + 3$ ne s'annule pas
donc $f(x) = x \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 3) - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 2x + 2 = 0$
or de nouveau $x^2 + 2x + 2$ ne s'annule pas, car discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$
donc $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$

3. Etudier les variations de la fonction f *2 points*

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 2x + 3$, on a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x + 2$
et donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 3 - x(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 3 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \dfrac{-x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 3)^2}$
comme le dénominateur est toujours positif (strictement), $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 3$
or $-x^2 + 3 = 3 - x^2 = \sqrt{3}^2 - x^2 = (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, donc son signe est du signe de a (i.e. négatif) à l'extérieur des racines et on peut alors dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3 - x^2$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f		$\searrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\nearrow$	$f(\sqrt{3})$	$\searrow$	

on peut éventuellement préciser :
$f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 3} = \dfrac{-\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}}$
soit $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3} - 2}$
et de même :
$f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 3} = \dfrac{1}{2\sqrt{3} + 2}$

4. Montrer que, pour tout entier naturel $n, 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$ *1,5 points*

Par récurrence ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$

Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \leqslant \sqrt{3}$ donc $P(0)$ est vraie (car $P(0) \Leftrightarrow 0 \leqslant u_0 \leqslant \sqrt{3}$)

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse $0 \leqslant u_n \geqslant \sqrt{3}$ et donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\sqrt{3})$
car d'après la question précédente f est croissante sur $[0, \sqrt{3}]$
de plus $f(0) = 0, f(u_n) = u_{n+1}$ et comme vu plus haut, $f(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2\sqrt{3} + 2}$ donc $f(\sqrt{3}) \leqslant 1$ et a fortiori $f(\sqrt{3}) \leqslant \sqrt{3}$
d'où finalement $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant f(\sqrt{3}) \leqslant \sqrt{3}$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$

5. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. *1 point*

On s'exécute ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc par définition $u_1 = \dfrac{1}{1^2+2\times 1+3} = \dfrac{1}{6}$ donc $u_1 \leqslant u_0$ i.e. $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par hypothèse $u_{n+1} \leqslant u_n$ et d'après la question précédente $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{3}$
et d'après **3.**, f est croissante sur $[0, \sqrt{3}]$ donc $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ i.e. $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. **a.** Pour $x \in \mathscr{D}_f$, étudier le signe de $f(x) - x$ *1,5 points*

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors par définition de f, $f(x) - x = \dfrac{x}{x^2+2x+3} - x = \dfrac{x}{x^2+2x+3} - \dfrac{x(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}$
$f(x) - x = \dfrac{x - x(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} = \dfrac{x(1-(x^2+2x+3))}{x^2+2x+3} = \dfrac{x(-x^2-2x-2)}{x^2+2x+3} = -\dfrac{x(x^2+2x+2)}{x^2+2x+3}$
or comme vu aux questions **1.** et **2.** les polynômes x^2+2x+2 et x^2+2x+3 ne s'annulent pas, donc ils sont toujours positifs (dans les deux cas $a = 1 > 0$) et donc $f(x) - x$ est du signe opposé de celui de x
i.e. $\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) - x \geqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \leqslant 0$

Retrouver le résultat de la question **5.** *1 point*

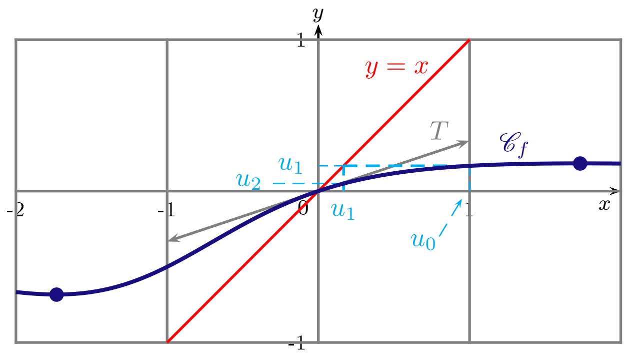
Comme vu ci-dessus, $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \leqslant 0$ et d'après la question **4.**, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \leqslant 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Déterminer l'équation de T, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 *1 point*

Par propriété, T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
or $f'(0) = \dfrac{-0^2+3}{(0^2+2\times 0+3)^2} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ et $f(0) = 0$ donc $T : y = \dfrac{1}{3}x$ i.e. T a pour équation $y = \dfrac{1}{3}x$

8. Sur l'intervalle $[-2; 2]$, représenter $\mathscr{C}_f$, la droite d'équation $y = x$ et l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la méthode « en escalier ». *2 pts*

On utilise les informations disponibles : $f(0), T$, le signe de $f(x) - x$ qui donne la position relative de entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$
on peut trouver des valeurs approchées de $f(-1)$ et $f(1)$ en utilisant $\sqrt{3} \simeq 1,7$
enfin on peut remarquer que f est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ et pressentir que sa limite est 0 en $-\infty$ et $+\infty$
pour les termes de la suite, on peut difficilement aller plus loin que u_2 mais cela permet de comprendre la tendance.



9. A l'aide de la représentation graphique de la suite réalisée à la question **8.**, émettre une conjecture sur la convergence de la suite.

Comme évoqué ci-dessus, il est déjà difficile de représenter u_3 car les termes se rapprochent rapidement de 0 et on pressent donc que la suite converge vers 0 ce qui est le cas. On démontrera bientôt qu'étant décroissante et minorée, la suite est de fait convergente (théorème de la limite monotone) et sa limite vérifie ensuite $f(x) = x$ dont la seule solution est 0 comme nous l'avons vu plus haut. *0,5 point*

10. Avec Python,

a. écrire un programme qui représente $\mathscr{C}_f, T$ et la droite d'équation $y = x$ sur un même graphique et sur l'intervalle $[-2; 2]$ *1,5 points*

On importe `numpy` pour `linspace` et `matplotlib.pyplot` pour la représentation. On définit une liste d'abscisses entre -2 et 2 avec `np.linspace`, puis on définit deux listes d'ordonnées, une pour f (il n'est pas indispensable de définir une fonction), une pour la tangente (une pour $y = x$ ce n'est pas nécessaire).
Enfin on utilise trois fois la commande plot pour voir les trois courbes.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(-2, 2, 100)
y=x/(x**2+2*x+3)
z=x/3
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,z)
plt.plot(x,x)
plt.show()
```

b. écrire un programme qui représente les 100 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1,5 points*

On calcule tous les termes de la suite de manière itérative avec une boucle `for` et on ajoute chaque terme à la liste `L` qui ne contient que u_0 initialement. Puis, pour la représenter un simple `plot(L)` suffit puisque les abscisses sont alors implicitement $0, 1, \ldots, 99$ et on ajoute le `+` pour obtenir le nuage de points.

```
u=1
L=[1]
for n in range(1,100):
  u=u/(u**2+2*u+3)
  L.append(u)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(L,'+')
plt.show()
```

c. écrire un programme qui permet de déterminer le premier entier n pour lequel on aura $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$ où ℓ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

Comme nous l'avons vu plus haut la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours positive (donc $|u_n - 0| = u_n$) et converge vers 0, donc on calcule ses termes de manière itérative à nouveau jusqu'à ce que l'écart u_n soit inférieur à 10^{-3}. On trouve finalement 6 ce qui confirme que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge « rapidement » vers 0

```
n=0
u=1
while u>10**(-3):
  u=u/(u**2+2*u+3)
  n=n+1
print(n)
```