*Visez la qualité :* $0+0+0+0<0,5$ Sans calculatrice
*Bon devoir !*

**Exercice 1** - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
*Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.*

a) $\sqrt{75}+\sqrt{363}=15\sqrt{3}$

b) si $x<3$ alors $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{3}$

c) $x\to\sqrt{x}$ est bijective de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

d) une fonction bijective est injective

e) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2\times(-1)^n$ diverge vers $+\infty$

f) si $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

g) une suite croissante admet toujours une limite

h) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

i) la médiane d'une série statistique est toujours inférieure ou égale à la moyenne de la série

j) la variance d'une série statistique est toujours positive

**Exercice 2** - calcul de limites

Déterminer les limites des suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

**1.** $u_n=\dfrac{n^3+e^{2n}-(\ln(n))^5}{1+e^{-3n}+(\ln(n))^2}$

**2.** $v_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$

**3.** $w_n=\dfrac{-3+(-1)^n}{n+1}$

**Exercice 3** - étude de fonction et suite

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}xe^{-x}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé du plan.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$

1. **a.** Discuter du signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel $x$
   **b.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$
   **c.** La fonction $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   **d.** Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $T_0$
   **e.** Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}x$
   **f.** Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y=x$ et préciser leurs éventuels points d'intersection.
   **g.** Représenter graphiquement l'allure de $\mathscr{C}_f$
   *Données* : $\ln(2)\simeq 0,7$ et $e^{-1}\simeq 0,4$
2. Représenter, avec la méthode « en escalier », et sur le même graphique
   **a.** les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0=-\dfrac{4}{5}$
   **b.** les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0=-\dfrac{3}{5}$
   **c.** les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0=1$
   **d.** et dans chaque cas, émettre des conjectures sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son comportement quand $n$ tend vers l'infini.
3. Que dire de la suite quand $u_0=-\ln(2)$ et $u_0=0$ ?
4. Dans cette question, on suppose que $u_0\in]-\ln(2);0[$
   **a.** Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, -\ln(2)<u_n<0$
   **b.** Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   **c.** Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. Dans cette question, on suppose que $u_0>0$ et on admet que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$
   **a.** Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   **b.** A l'aide de la question **1.e.**, démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}u_n$ puis que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant\dfrac{u_0}{2^n}$
   **c.** En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   **d.** On considère maintenant les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour $n\in\mathbb{N}$ par :
   $v_n=\ln(u_n)$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$
      i. Établir, pour tout entier naturel $n$, une relation entre $v_{n+1}, v_n$ et $u_n$
      ii. Démontrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}, S_n=\ln(u_0)-(n+1)\ln(2)-\ln(u_{n+1})$
      iii. Étudier les variations de la suite $(S_n)$ et, en utilisant le résultat de la question **5.b.**, démontrer qu'elle est majorée.
      iv. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(S_n)$ ?
6. Dans cette question, $u_0<-\ln(2)$
   **a.** Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   **b.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être minorée.

**c.** Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

**7.** Avec Python,

**a.** écrire un programme qui représente la courbe représentative de $f$, ainsi que $T_0$ et la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ sur un même graphique et sur un intervalle de votre choix, choix à justifier.

**b.** avec $u_0 = 1$, écrire un programme qui représente les 100 premières valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**c.** écrire un programme qui donne le premier rang pour lequel $u_n \leqslant 10^{-8}$

## Exercice 4

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces $A$ et $B$.
Elle est dans la pièce $A$ à $t = 0$, et évolue ainsi :

- si elle est en $A$ à l'instant $n$ , elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en $B$ avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n + 1$ ;
- si elle est en $B$ à l'instant $n$, elle retourne en $A$ avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en $B$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$ à l'instant $n + 1$ ;
- si elle est dehors, elle y reste.

On note les événements $A_n$ : « la guêpe est en $A$ à l'instant n », $B_n$ : « la guêpe est en B à l'instant $n$ » et $C_n$ : « la guêpe sort dehors à l'instant n ».
Les probabilités respectives de ces événements sont notées $a_n, b_n$ et $c_n$

**1.** Calculer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ et $c_2$

**2.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$ et que $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$

**3.** Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ est une suite constante à partir du rang 1

**4.** Montrer que $v_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique.

**5.** En déduire les valeurs de $a_n$ et de $b_n$

**6.** Que vaut $c_n$ ?

**7.** Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**8.** Avec Python,

**a.** écrire :

- une fonction `PieceA` qui renvoie 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$
- une fonction `PieceB` qui renvoie 0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ; 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$

**b.** écrire un programme qui simule les 100 premiers déplacements de la guêpe et les stocke dans une liste.

**Exercice 5**

Un atelier fabrique des pièces selon un processus composé de deux opérations $O_1$ et $O_2$ faites successivement : une pièce est d'abord façonnée sur un premier type de machine : c'est l'opération $O_1$ ; puis elle est finie sur un second type de machine : c'est l'opération $O_2$

**1.** L'opération $O_1$ est effectuée sur 3 machines $M_1, M_2$ et $M_3$

- $M_1$ façonne 1 500 pièces par jour avec une proportion $p_1 = 0,006$ de défectueuses.
- $M_2$ façonne 2 000 pièces par jour avec une proportion $p_2 = 0,008$ de défectueuses.
- $M_3$ façonne 2 500 pièces par jour avec une proportion $p_3 = 0,004$ de défectueuses.

On pourra noter $M_1$ (resp. $M_2, M_3$) l'événement « être façonné par $M_1$ (resp. $M_2, M_3$) ». De la production journalière, on extrait une pièce au hasard.

**a.** Quelle est la probabilité qu'elle ait été façonnée par $M_1$ ? par $M_2$ ? $M_3$ ?

**b.** Calculer la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse.

**c.** La pièce extraite est défectueuse ; calculer la probabilité qu'elle ait été façonnée par $M_1$.

**d.** Les événements $M_1$ et « la pièce extraite est défectueuse » sont-ils indépendants ?

**2.** Opération $O_2$ : les 6 000 pièces produites quotidiennement passent ensuite sur une machine unique $M$ pour la finition. Il s'avère que chaque pièce a une probabilité égale à $0,015$ d'être ratée par $M$, indépendamment du fait qu'elle ait été bien ou mal façonnée auparavant et indépendamment des autres pièces. On tire une pièce au hasard parmi les 6 000 produites quotidiennement, et ayant subi les 2 opérations. Calculer les probabilités des événements suivants :

**a.** Les 2 opérations ont été mal faites.

**b.** La pièce est mal faite.

**c.** Une seule opération a été mal faite.

**3.** Pour évaluer l'efficacité de ses machines, la responsable de l'atelier effectue tous les jours des vérifications approfondies sur un échantillon de 100 pièces.
Le tableau ci-dessous présente les résultats des tests et donnent le nombre de pièces de l'échantillon quotidien réussies par la machine $M$ au cours du mois d'avril :

| Jour | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pièces réussies | 98 | 100 | 99 | 99 | 98 | 97 | 100 | 96 | 99 | 97 | 98 | 98 | 99 | 100 | 95 |

| Jour | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pièces réussies | 100 | 100 | 99 | 100 | 97 | 98 | 99 | 99 | 100 | 100 | 97 | 99 | 98 | 96 | 98 |

**a.** Résumer dans un tableau les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées des différentes valeurs de la série statistique.

**b.** Représenter le diagramme des fréquences cumulées de cette série statistique.

**c.** Déterminer l'étendue, les premier et troisième quartiles ainsi que la médiane de cette série statistique.

**d.** Représenter le diagramme en boîte de cette série statistique.

**e.** Déterminer la moyenne de cette série statistique.
*On cherchera à donner une valeur approchée.*

**f.** Sachant que $\overline{x^2} \simeq 9\,691$, donner une valeur approchée de la variance.
*On cherchera à préciser à l'unité près.*

**g.** En supposant que vous disposez d'une série statistique similaire mais dont vous ne connaissez pas la longueur, écrire un programme Python qui calcule la moyenne et l'écart-type de la série statistique.
On supposera que la série de valeurs est contenue dans une liste `L` (prédéfinie dans Python).