Corrigé *Total sur 78 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *0,5 point par question - total : 5 points*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\sqrt{75}+\sqrt{363}=15\sqrt{3}$

C'est faux puisque $\sqrt{75}+\sqrt{363}=\sqrt{25\times 3}+\sqrt{121\times 3}=\sqrt{25}\sqrt{3}+\sqrt{121}\sqrt{3}=5\sqrt{3}+11\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

b) si $x<3$ alors $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{3}$

C'est faux (par exemple avec $x=-1$)

c) $x\to\sqrt{x}$ est bijective de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

Vrai (cf. cours).

d) une fonction bijective est injective

Vrai par définition.

e) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2\times(-1)^n$ diverge vers $+\infty$

C'est faux, une valeur sur deux est négative.

f) si $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

C'est faux, par exemple avec $u_n=\dfrac{1}{2^n}$ et $v_n=n$

g) une suite croissante admet toujours une limite

Vrai d'après le théorème de la limite monotone : soit une limite finie (si elle est majorée) soit $+\infty$ (si elle n'est pas majorée).

h) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Faux, par exemple avec $u_n=1+\dfrac{1}{n+1}$

i) la médiane d'une série statistique est toujours inférieure ou égale à la moyenne de la série

Faux, par exemple avec la série $1-3-4$

j) la variance d'une série statistique est toujours positive

Vrai, par définition.

Exercice 2 - calcul de limites *4 points*

Déterminer les limites des suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n=\dfrac{n^3+e^{2n}-(\ln(n))^5}{1+e^{-3n}+(\ln(n))^2}$ *1,5 points*

Les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur sont respectivement : e^{2n} et $(\ln(n))^2$, donc on factorise par ces termes,

$$u_n=\frac{e^{2n}\left(1+\frac{n^3}{e^{2n}}-\frac{(\ln(n))^5}{e^{2n}}\right)}{(\ln(n))^2\left(1+\frac{1}{(\ln(n))^2}+\frac{1}{e^{3n}(\ln(n))^2}\right)}=\frac{e^{2n}}{(\ln(n))^2}\times\frac{1+\frac{n^3}{e^{2n}}-\frac{(\ln(n))^5}{e^{2n}}}{1+\frac{1}{(\ln(n))^2}+\frac{1}{e^{3n}(\ln(n))^2}}\ (\text{car } e^{-3n}=\frac{1}{e^{3n}})$$

or par croissances comparées : $\dfrac{n^3}{e^{2n}}\to 0$ $\dfrac{(\ln(n))^5}{e^{2n}}\to 0$ et $\dfrac{e^{2n}}{(\ln(n))^2}\to+\infty$

et d'après les limites usuelles : $\dfrac{1}{(\ln(n))^2}\to 0$ (et opération) $\dfrac{1}{e^{3n}(\ln(n))^2}\to 0$

donc par opérations $\dfrac{1+\frac{n^3}{e^{2n}}-\frac{(\ln(n))^5}{e^{2n}}}{1+\frac{1}{(\ln(n))^2}+\frac{1}{e^{3n}(\ln(n))^2}}\to 1$ et de fait par produit $u_n\to+\infty$

2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ *1,25 points*

On utilise la méthode du conjugué :
$v_n = (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) = \dfrac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}} = \dfrac{n^2+1-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$
or $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} \geqslant \sqrt{n^2+1} \geqslant \sqrt{n^2} = n$ donc $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} \to +\infty$
et de fait par quotient $\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \to 0$

3. $w_n = \dfrac{-3+(-1)^n}{n+1}$ *1,25 points*

On remarque que le numérateur est borné et que le dénominateur tend vers $+\infty$, on va donc utiliser le théorème des gendarmes :
$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-4 \leqslant -3+(-1)^n \leqslant -2 \leqslant 0$
or $\dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $-\dfrac{4}{n+1} \leqslant \dfrac{-3+(-1)^n}{n+1} \leqslant 0$
or $n+1 \to +\infty$ (car $n+1 \geqslant n$) donc par opérations $-\dfrac{4}{n+1} \to 0$
donc d'après le théorème précité, $w_n \to 0$

Exercice 3 - étude de fonction et suite *35 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}xe^{-x}$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. **a.** Discuter du signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x *1 point*

Le résultat de l'exponentielle étant toujours positif, de même que le facteur $\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $f(x)$ est du signe de x, c'est-à-dire négatif (ou nul) sur $]-\infty, 0]$ et positif (ou nul) sur $[0, +\infty[$

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ *1,5 points*

Pour étudier les variations de f, nous allons d'abord calculer sa dérivée (f est bien dérivable en tant que produit de fonctions dérivables), on peut en effet écrire $f(x) = \dfrac{1}{2}u(x)v(x)$ où $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$
de fait $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$ (forme e^w dont la dérivée est $w'e^w$
alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{2}(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) = \dfrac{1}{2}\left(1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})\right) = \dfrac{1}{2}e^{-x}(1-x)$
on en déduit, de même qu'à la question précédente, que $f'(x)$ est du signe de $1-x$ or $1-x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant x$ d'où les tableaux de signes et de variations suivants, sachant par ailleurs que $f(1) = \dfrac{1}{2} \times 1 \times e^{-1} = \dfrac{e^{-1}}{2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	-	
$f'(x)$		$+$	0	-	
f		$\nearrow$	$\dfrac{e^{-1}}{2}$	$\searrow$	

c. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ? *1,25 points*

Au regard du tableau de variations, on comprend que f n'est pas injective, étant donné qu'elle est croissante sur $]-\infty, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, et en admettant qu'elle est continue, certaines valeurs seront atteintes deux fois.
Toujours grâce à l'étude des variations, on sait que f admet pour maximum $\dfrac{e^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2e}$ donc toutes les valeurs strictement supérieures ne seront pas atteintes, par exemple 1, de fait f n'est pas surjective.
Enfin la non injectivité ou la non surjectivité suffit à établir que f n'est pas bijective.

d. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée T_0 *0,75 point*

T_0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$
or $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}e^{-0}(1-0) = \dfrac{1}{2}$ et donc $T_0 : y = \dfrac{1}{2}x$

e. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x$ *1,5 points*

On précise dans un premier temps que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}xe^{-x} \leqslant \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}xe^{-x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{2}x\left(1-e^{-x}\right)$
on peut alors étudier le signe de ce produit, sachant que $1-e^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geqslant \ln\left(e^{-x}\right) \Leftrightarrow 0 \geqslant -x \Leftrightarrow 0 \leqslant x$
on garde l'équivalence en composant par le logarithme car les fonctions logarithme et exponentielle (pour le sens retour) sont croissantes. On peut donc établir le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-	0	$+$	
$1-e^{-x}$		-	0	$+$	
$\dfrac{1}{2}x\left(1-e^{-x}\right)$		$+$	0	$+$	

On en conclut que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \dfrac{1}{2}x\left(1-e^{-x}\right)$ et donc par équivalence que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x$

f. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ et préciser leurs éventuels points d'intersection. *2 points*

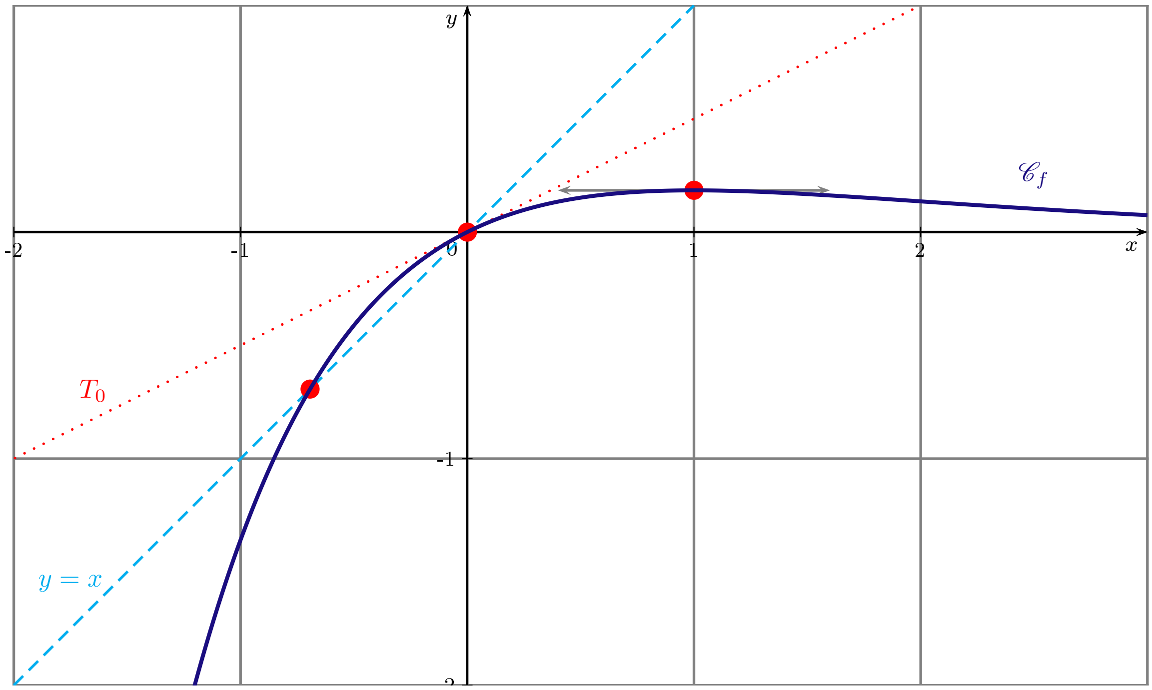
Pour cela, il s'agit de comparer $f(x)$ et x, i.e. d'étudier le signe de $f(x)-x$ et la méthode est analogue à la question précédente :
en effet $f(x) - x = \dfrac{1}{2}xe^{-x} - x = \dfrac{1}{2}x\left(e^{-x}-2\right)$
on étudie alors le signe de ce produit, sachant que comme plus haut :
$e^{-x} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geqslant 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow -x \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow x \leqslant -\ln(2)$
on peut préciser que l'inégalité est stricte si $x \neq \ln(2)$ et donner le tableau suivant :

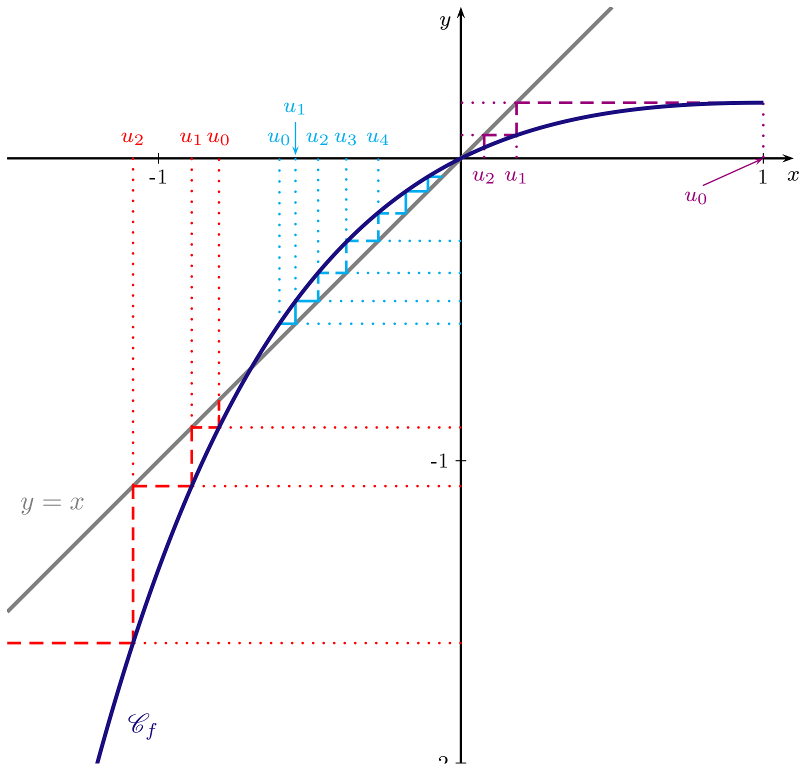
x	$-\infty$		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
x		-		-	0	$+$	
$e^{-x}-2$		$+$	0	-		-	
$f(x)-x$		-	0	$+$	0	-	

On en conclut que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la droite $y = x$ (cas $f(x) - x \leqslant 0$) sur $]-\infty, -\ln(2)]$ et sur $[0, +\infty[$
que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = x$ (cas $f(x) - x \geqslant 0$) sur $[-\ln(2), 0]$
et que les points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = x$ sont les points d'abscisses $-\ln(2)$ et 0

g. Représenter graphiquement l'allure de $\mathscr{C}_f$ *2,5 points*
Données : $\ln(2) \simeq 0,7$ et $e^{-1} \simeq 0,4$

On fait apparaitre toutes les informations obtenues précédemment : les droites $y = x$ et T_0 et on connait les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ces droites
quelques points importants également, les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les droites : $f(-\ln(2)) = -\ln(2), f(0) = 0$, ainsi que le maximum $f(1) = \dfrac{e^{-1}}{2}$
en s'assure évidemment que le tracé est compatible avec le tableau de variations.
Il nous manque les limites, mais avec nos connaissances sur les limites de suites, sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$ par croissance comparée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et on peut aisément comprendre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (on savait d'ailleurs depuis la première question que $\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant 0$
par ailleurs, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$, or on comprend que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (par théorème des gendarmes, version infinie) Tous ces éléments nous orientent également vers l'intervalle sur lequel on effectue la représentation, on choisit ici de représenter sur $[-2, 3]$





2. Représenter, avec la méthode « en escalier », et sur le même graphique *2,5 points*

a. les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 = -\dfrac{4}{5}$

b. les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 = -\dfrac{3}{5}$

c. les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 = 1$

d. et dans chaque cas, émettre des conjectures sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son comportement quand n tend vers l'infini.

La méthode est analogue pour les 3 cas, on prend une valeur de u_n en abscisse, on la reporte sur la courbe de f, on reporte alors l'ordonnée (qui vaut alors u_{n+1}) sur l'axe de des ordonnées. On reporte cette ordonnée sur la droite $y = x$, puis on prend l'abscisse de ce point (qui vaut alors u_{n+1}). Et on recommence l'opération.
On reproduit le graphique précédent, en se contentant de $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = x$, en zoomant autour de la zone d'intérêt.
On observe que :

- dans le premier cas (en rouge), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble décroître et tendre vers $-\infty$
- dans le deuxième cas (en bleu), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croître et tendre vers 0
- dans le troisième cas (en violet), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble décroître et tendre vers 0

3. Que dire de la suite quand $u_0 = -\ln(2)$ et $u_0 = 0$? *1 point*

Comme nous n'avons vu plus haut $f(-\ln(2)) = -\ln(2)$, donc on en déduit que si $u_0 = -\ln(2)$ alors $u_1 = f(u_0) = -\ln(2), u_2 = f(u_1) = -\ln(2)$ et en fait par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\ln(2)$
de même, comme $f(0) = 0$, si $u_0 = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ donc dans ces deux cas les suites sont constantes (égales au premier terme).

4. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in]-\ln(2); 0[$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, -\ln(2) < u_n < 0$ *1,5 points*

Par récurrence évidemment ! On pose pour $n \in \mathbb{N}, P(n) : -\ln(2) < u_n < 0$

<u>Initialisation</u> : par définition de u_0 ici, $-\ln(2) < u_0 < 0$ donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vérifiée
alors par hypothèse de récurrence $-\ln(2) < u_n < 0$
or f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ donc $f(-\ln(2)) < f(u_n) < f(0)$
de plus $f(-\ln(2)) = -\ln(2)$ et $f(0) = 0$ donc $-\ln(2) < u_{n+1} < 0$ i.e. $P(n+1)$ est vérifiée
de fait par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $-\ln(2) < u_n < 0$

b. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

d'après **1.f.**, pour $x \in [-\ln(2); 0], f(x) \geqslant x$
or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, -\ln(2) < u_n < 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \geqslant u_n$, soit $u_{n+1} \geqslant u_n$ i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *2 points*

D'après les questions précédentes, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 0), donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Notons ℓ sa limite, on admet que $e^{-u_n} \to e^{-\ell}$ et donc par produits de limites : $\frac{1}{2}u_n e^{-u_n} \to \frac{1}{2}\ell e^{-\ell}$
i.e. $u_{n+1} \to \frac{1}{2}\ell e^{-\ell}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}u_n e^{-u_n}$
or par propriété $u_n \to \ell \Rightarrow u_{n+1} \to \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = \frac{1}{2}\ell e^{-\ell}$ i.e. $f(\ell) = \ell$
or d'après la question **1.f** $f(x) = x \Leftrightarrow x = -\ln(2)$ ou $x = 0$, donc $\ell = -\ln(2)$ ou $\ell = 0$
par ailleurs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$ dont on déduit que $\ell \geqslant u_0$ par propriété (passage à la limite dans l'inégalité)
or $u_0 > -\ln(2)$ par hypothèse, donc $\ell > -\ln(2)$, de fait la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être $-\ln(2)$, et on en déduit que c'est forcément 0

5. Dans cette question, on suppose que $u_0 > 0$ et on admet que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

a. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

Comme on a pu le pressentir avec la représentation graphique de la suite avec $u_0 = 1$, dans ce cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On le démontre comme plus haut grâce à l'étude préalable de $f(x) - x$:
d'après **1.f.**, pour $x \geqslant 0, f(x) \leqslant x$
or d'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leqslant u_n$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$ i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. A l'aide de la question **1.e.**, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$ *2 points*

On s'exécute : d'après la question **1.e.** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant \frac{1}{2}x$
donc en appliquant ce résultat à u_n on trouve $f(u_n) \leqslant \frac{1}{2}u_n$ i.e. $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$
on va alors démontrer la deuxième inégalité par récurrence, on pose pour $n \in \mathbb{N}, Q(n) : u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$

Initialisation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow u_0 \leqslant \frac{u_0}{2^0} \Leftrightarrow u_0 \leqslant \frac{u_0}{1} \Leftrightarrow u_0 \leqslant u_0$
ce qui est vrai donc $Q(0)$ est vérifiée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $Q(n)$ est vraie
d'après l'inégalité démontrée juste au-dessus $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$
or par hypothèse de récurrence $u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$ donc $\frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{u_0}{2^n}$ i.e. $\frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{u_0}{2 \times 2^n}$ soit $\frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{u_0}{2^{n+1}}$
d'où en combinant les deux inégalités, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{u_0}{2^{n+1}}$ et donc $u_{n+1} \leqslant \frac{u_0}{2^{n+1}}$ i.e. $Q(n+1)$ est vérifiée
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie, i.e. $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$

c. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

Nous aurions pu le faire comme à la question **4.c.** mais on va ici utiliser la question précédente :
d'après l'énoncé et la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$
or d'après les limites usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (cas q^n avec $q > 1$) donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_0}{2^n} = 0$
et donc d'après le théorème des gendarmes (et car $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

d. On considère maintenant les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$v_n = \ln(u_n)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

i. Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre v_{n+1}, v_n et u_n *1 point*

Par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, v_{n+1} = \ln(u_{n+1})$

et donc par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2}u_n e^{-u_n}\right)$

donc par propriété du logarithme, $v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(u_n) + \ln(e^{-u_n})$

or $+\ln(e^{-u_n}) = -u_n$ donc $v_{n+1} = -\ln(2) + \ln(u_n) - u_n = -\ln(2) + v_n - u_n$

ii. Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \ln(u_0) - (n+1)\ln(2) - \ln(u_{n+1})$ *1,5 points*

d'après la question précédente $u_n = -\ln(2) + v_n - v_{n+1}$

donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(-\ln(2) + v_k - v_{k+1}) = -\sum_{k=0}^{n}\ln(2) + \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$ par linéarité

or $\sum_{k=0}^{n}\ln(2) = (n+1)\ln(2)$ et $\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ par télescopage

donc $S_n = -(n+1)\ln(2) + v_0 - v_{n+1} = -(n+1)\ln(2) + \ln(u_0) - \ln(u_{n+1})$ car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$

iii. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, en utilisant le résultat de la question **5.b.**, démontrer qu'elle est majorée. *2,5 points*

Par définition $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k$ par relation de Chasles

donc $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ or $u_{n+1} \geqslant 0$ d'après l'énoncé donc $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$ i.e. (S_n) est croissante

Par ailleurs, d'après **5.b.** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$, donc par addition d'inégalités : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{u_0}{2^k}$

or $\sum_{k=0}^{n} \frac{u_0}{2^k} = u_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ par linéarité et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$ d'après les résultats sur les sommes géométriques, donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$

de fait $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 2$ et donc $u_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 2u_0$ (car $u_0 \geqslant 0$) et a fortiori $S_n \leqslant 2$ i.e. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

iv. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$? *0,5 point*

D'après la question précédente, on sait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6. Dans cette question, $u_0 < -\ln(2)$

a. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

De même, comme on a pu le pressentir avec la représentation graphique de la suite avec $u_0 = 1$, dans ce cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On le démontre comme plus haut grâce à l'étude préalable de $f(x) - x$ mais il faut d'abord montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'inégalité, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -\ln(2)$, ce qui se fait (comme plus haut également) par une récurrence quasi-immédiate :
Initialisation : vérifiée car par hypothèse $u_0 < -\ln(2)$
Hérédité : vérifiée car $u_n \leqslant -\ln(2) \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(-\ln(2))$ par croissance de f sur $]-\infty, 1]$, soit $u_{n+1} \leqslant -\ln(2)$ car $f(-\ln(2)) = -\ln(2)$
puis d'après **1.f.**, pour $x \leqslant -\ln(2), f(x) \leqslant x$
or d'après l'inégalité juste au-dessus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -\ln(2)$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leqslant u_n$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$ i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Option B : on peut d'emblée démontrer la décroissance par récurrence, en utilisant $f(u_0) \leqslant u_0$ pour l'initialisation et la croissance de f pour l'hérédité.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être minorée. *1,5 points*

Par l'absurde naturellement ! Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors comme on sait, d'après la question précédente, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on en déduit d'après le théorème de la limite monotone que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite, alors par le même raisonnement qu'à la question **4.c.** on en déduit d'une part que $\ell = -\ln(2)$ ou $\ell = 0$

et d'autre part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_0$ et donc $\ell \leqslant u_0$ par passage à la limite dans l'inégalité
or $u_0 < -\ln(2)$ par hypothèse, donc d'une part $\ell < -\ln(2)$ et d'autre part $\ell = -\ln(2)$ ou $\ell = 0$ ce qui est contradictoire
donc notre hypothèse de départ est fausse, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée

c. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? *0,5 point*

A nouveau, d'après les questions précédentes, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

7. Avec Python,

a. écrire un programme qui représente la courbe représentative de f, ainsi que T_0 et la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ sur un même graphique et sur un intervalle de votre choix, choix à justifier. *1,5 points*

Comme plus haut, on choisit l'intervalle $[-2, 3]$ qui permet de représenter les principales propriétés de la fonction. Pour cela, on définit la fonction, en ayant importé `numpy` préalablement pour l'exponentielle. Ensuite, on importe `matplotlib.pyplot`, puis à partir de la liste d'abscisses, on créée la liste des ordonnées de la fonction f que l'on représente avec les droite.

```
import numpy as np
def f(x):
  return x*np.exp(-x)/2
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(-2,3,100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,x) #pour la droite y=x
plt.plot(x,x/2) #pour la droite y=x/2
plt.show()
```

b. avec $u_0 = 1$, écrire un programme qui représente les 100 premières valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On calcule les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière récursive et on les inclut progressivement dans une liste. Au passage on calcule les valeurs de S_n (cumul) que l'on intègre dans une autre liste. Enfin, on représente ces deux listes. *1,5 points*

```
L=[1] # la liste ne contient que le premier terme initialement
u=1 # le premier terme de la suite
S=[1] # pour la liste des termes de Sn et car S0=u0=1
for n in range(1,100):
 u=f(u) #on calcule le nouveau terme en fonction du précédent
 L.append(u) # on le rajoute dans la liste
 S.append(S[n-1]+u) # car Sn=S(n-1)+u(n)
plt.plot(L, '+') # par défaut, les abscisses sont 0, 1, ..., 99, ce qui convient ici
plt.plot(S, '+')
plt.show()
```

c. écrire un programme qui donne le premier rang pour lequel $u_n \leqslant 10^{-8}$ *1 point*

On répond à cela avec une classique boucle `while` en calculant de manière itérative les termes de la suite jusqu'à passer sous le seuil et en mettant à jour l'information sur le rang, que l'on affiche à l'issue de la boucle (on trouve 25).

```
u=1
n=0
while u>10**(-8):
  u=f(u)
  n=n+1
print(n)
```

Exercice 4 *14 points*

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B.
Elle est dans la pièce A à $t = 0$, et évolue ainsi :

- si elle est en A à l'instant n , elle reste en A avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ à l'instant $n+1$;
- si elle est en B à l'instant n, elle retourne en A avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\dfrac{1}{4}$ à l'instant $n+1$;
- si elle est dehors, elle y reste.

On note les événements A_n : « la guêpe est en A à l'instant n », B_n : « la guêpe est en B à l'instant n » et C_n : « la guêpe sort dehors à l'instant n ».
Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n

1. Calculer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ et c_2 *2 points*

D'après les hypothèses de l'énoncé, la guêpe se trouve dans la pièce A à l'instant $t = 0$, donc $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ de fait, à l'instant suivant ($t = 1$), elle a une chance sur 3 d'être à nouveau dans la pièce A et deux chances sur 3 d'être dans la pièce B
on peut le justifier plus rigoureusement avec la formule des probabilités totales :
$a_1 = P(A_1) = P(A_0 \cap A_1) + P(B_0 \cap A_1) + P(C_0 \cap A_1) = P(A_0)P_{A_0}(A_1) + P(B_0)P_{B_0}(A_1) + P(C_0)P_{C_0}(A_1)$ car à tout instant n, A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements
donc $P(A_1) = P(A_0)P_{A_0}(B_1) = a_0 P_{A_0}(B_1)$ car $P(B_0) = b_0 = P(C_0) = c_0 = 0$ et donc $P(A_1) = 1 \times \dfrac{1}{3}$ car par hypothèse $P_{A_0}(B_1) = \dfrac{1}{3}$ puisqu'il y a une chance sur 3 que la guêpe passe de la pièce A à la pièce B
de même $b_1 = P(B_1) = P(A_0)P_{A_0}(B_1) = 1 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $c_1 = P(C_1) = 0$
et à nouveau, avec les probabilités totales pour l'instant $t = 2$:
$a_2 = P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(C_1)P_{C_1}(A_2) = a_1 \times \dfrac{1}{3} + b_1 \times \dfrac{1}{4} + 0 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{18}$
$b_2 = P(B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = a_1 \times \dfrac{2}{3} + b_1 \times \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3} + 1\right) = \dfrac{5}{9}$
on peut faire de même pour C_2 ou remarque que $a_2 + b_2 + c_2 = 1$ donc $c_2 = 1 - \dfrac{5}{18} - \dfrac{5}{9} = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n$ et que $b_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$ *2 points*

On utilise de même la formule des probabilités totales car $\forall n \in \mathbb{N}, A_n, B_n, C_n$ forment un système complet d'événements (la guêpe est forcément sur un et un seul de ces trois lieux)
donc $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{4} + 0 = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n$
car d'après les notations de l'énoncé $P(A_n) = a_n$ et $P(B_n) = b_n$, de plus d'après l'énoncé encore $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ (il y a une chance sur 3 que la guêpe reste dans la pièce A d'un instant à l'autre), $P_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (il y a une chance sur 4 que la guêpe passe de la pièce B à la pièce A d'un instant à l'autre) et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ car quand la guêpe est dehors, elle y reste.
de même $P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = a_n \times \dfrac{2}{3} + b_n \times \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$
car $P_{A_n}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$

3. Montrer que $u_n = \dfrac{6}{10}a_n - \dfrac{3}{10}b_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ est une suite constante à partir du rang 1 *1 point*

Une suite constante vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$, on va donc chercher un lien en u_{n+1} et u_n
par définition, $u_{n+1} = \dfrac{6}{10}a_{n+1} - \dfrac{3}{10}b_{n+1}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{6}{10}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n\right) - \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right)$ d'après la question précédente
donc $u_{n+1} = \dfrac{2}{10}a_n + \dfrac{3}{20}b_n - \dfrac{2}{10}a_n - \dfrac{3}{20}b_n = 0$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$
donc $\forall n \geqslant 1, u_n = 0$ de fait $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 (et égale à 0).

4. Montrer que $v_n = \dfrac{4}{10}a_n + \dfrac{3}{10}b_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique. *1,5 points*

De même par définition, $v_{n+1} = \dfrac{4}{10}a_{n+1} + \dfrac{3}{10}b_{n+1}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{4}{10}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n\right) + \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right)$ d'après la question **2.** et donc

$v_{n+1} = \frac{4}{30}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n = \frac{10}{30}a_n + \frac{5}{20}b_n = \frac{20}{60}a_n + \frac{15}{60}b_n = \frac{5}{6} \times \frac{4}{10}a_n + \frac{5}{6} \times \frac{3}{10}b_n = \frac{5}{6}\left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n\right) = \frac{5}{6}v_n$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{5}{6}$

5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n *2 points*

Pour a_n il suffit de remarquer que $a_n = u_n + v_n$

en effet, par définition, $u_n + v_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n + \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{6}{10}a_n = \frac{4+6}{10}a_n = \frac{10}{10}a_n = a_n$

or d'après la question précédente $\forall n \geqslant 1, u_n = 0$ et $v_n = v_0\left(\frac{5}{6}\right)^n$ car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et $v_0 = \frac{4}{10}a_0 + \frac{3}{10}b_0 = \frac{4}{10} \times 1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ donc $\forall n \geqslant 1, a_n = 0 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{2 \times 5^{n-1}}{6^n}$

on peut alors déduire b_n de l'une des deux relations, on prend la première qui est plus simple car $u_n = 0$

de fait $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n \Rightarrow \frac{3}{10}b_n = \frac{6}{10}a_n$ et donc $b_n = \frac{10}{3} \times \frac{6}{10}a_n = \frac{6}{3}a_n = 2a_n = 2 \times \frac{2 \times 5^{n-1}}{6^n} = \frac{4 \times 5^{n-1}}{6^n}$

on peut vérifier avec a_1 et b_1 et voir que les formules fonctionnent dans ce cas.

6. Que vaut c_n ? *1 point*

Comme évoqué plus haut, $\forall n \in \mathbb{N}, (A_n, B_n, C_n)$ forment un système complet d'événements et donc $a_n + b_n + c_n = 1$ soit $a_n + 2a_n + c_n = 1$ car $b_n = 2a_n$ et donc $c_n = 1 - 3a_n$

d'où d'après la question précédente, $c_n = 1 - 3 \times \frac{2 \times 5^{n-1}}{6^n} = 1 - \frac{6 \times 5^{n-1}}{6^n} = 1 - \frac{5^{n-1}}{6^{n-1}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

7. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

D'après les limites de référence $\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$)

donc avec la forme intermédiaire trouvée, $a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ on trouve $a_n \to \frac{2}{5} \times 0$ par produit et donc $a_n \to 0$

de fait $b_n \to 0$ car $b_n = 2a_n$ et $c_n \to 1$ car $c_n = 1 - 3a_n$, autrement dit la guêpe finit par sortir.

8. Avec Python,

a. écrire :

- une fonction `PieceA` qui renvoie 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ *1,5 points*

  On utilise la fonction `randint` en ayant au préalable importé la bibliothèque `numpy.random` en générant 3 entiers aléatoires de manière équiprobable (par exemple $1, 2, 3$, attention la deuxième valeur dans `randint` est exclue) et on choisit que la fonction renvoie 0 si le nombre vaut 1 ou 2 et renvoie 1 sinon, ce qui répond à la question.
  La fonction ne dépend de rien car le résultat renvoyé est aléatoire.

```
import numpy.random as rd
def pieceA():
  n=rd.randint(1,4)
  if n==1 :
    return 0
  else :
    return 1
```

- une fonction `PieceB` qui renvoie 0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$; 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ *0,5 point*

  De manière analogue, on crée la fonction ci-contre (il y a bien deux cas sur quatre ou le 1 est renvoyé et un cas sur quatres pour 0 et 1)

```
def pieceB():
  n=rd.randint(1,5)
  if n==1 :
    return 0
  if n==2 :
    return 2
  else :
    return 1
```

b. écrire un programme qui simule les 100 premiers déplacements de la guêpe et les stocke dans une liste. *1,5 points*

On utilise une boucle `for` pour répéter des déplacements et à chaque fois, il suffit d'appliquer la fonction `pieceA` si la puce est dans la pièce A ce que l'on modélise par la valeur 0 et par `pieceB` si la puce est dans la pièce B ce que l'on modélise par la valeur 1. Enfin si la puce est dehors, ce que l'on modélise par la valeur 2, on la laisse (i.e. on ne fait rien).
On crée donc une variable qui modélise à chaque instant sa position, on l'appelle `p` et elle vaut 0 initialement. On stocke les valeurs dans la liste progressivement.
Comme nous l'avions compris mathématiquement, on trouve que la guêpe finit par sortir.

```
p=0 # la guêpe est dans la pièce A
    initialement
L=[0] # pour stocker les valeurs :
for n in range(1,101) :
  if p==0 : # si la guêpe est dans la
    pièce A
    p=pieceA() # mouvement de la guêpe
  elif p==1 : # si la guêpe est dans la
    pièce B
    p=pieceB() # mouvement de la guêpe
  L.append(p) # et on ne fait rien si p=2
print(L)
```

Exercice 5 *20 points*

Un atelier fabrique des pièces selon un processus composé de deux opérations O_1 et O_2 faites successivement : une pièce est d'abord façonnée sur un premier type de machine : c'est l'opération O_1 ; puis elle est finie sur un second type de machine : c'est l'opération O_2.

1. L'opération O_1 est effectuée sur 3 machines M_1, M_2 et M_3.

- M_1 façonne 1 500 pièces par jour avec une proportion $p_1 = 0,006$ de défectueuses.
- M_2 façonne 2 000 pièces par jour avec une proportion $p_2 = 0,008$ de défectueuses.
- M_3 façonne 2 500 pièces par jour avec une proportion $p_3 = 0,004$ de défectueuses.

On pourra noter M_1 (resp. M_2, M_3) l'événement « être façonné par M_1 (resp. M_2, M_3) ».

De la production journalière, on extrait une pièce au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'elle ait été façonnée par M_1 ? par M_2 ? M_3 ? *1 point*

Il y a $1\,500+2\,000+2\,500 = 6\,000$ pièces qui subissent l'opération O_1 dans la journée dont 1 500 qui sont façonnées par M_1. Le tirage de n'importe quelle pièce étant équiprobable, on trouve :
$P(M_1) = \dfrac{1\,500}{6\,000} = \dfrac{1}{4}$ et de même on trouve $P(M_2) = \dfrac{2\,000}{6\,000} = \dfrac{1}{3}$ et $P(M_3) = \dfrac{2\,500}{6\,000} = \dfrac{5}{12}$

b. Calculer la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse. *2 points*

Une pièce défectueuse peut être passée par M_1, M_2 ou M_3. Plus précisément, les événements M_1, M_2, M_3 forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales et en notant D l'événement « on tire une pièce défectueuse » :
$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) = P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D) + P(M_3)P_{M_3}(D)$
or d'après **1.**, et d'après l'énoncé $P_{M_1}(D) = 0,006 = \dfrac{6}{1000}$, $P_{M_2}(D) = 0,008 = \dfrac{8}{1000}$ et $P_{M_3}(D) = 0,004 = \dfrac{4}{1000}$

$$\text{donc } P(D) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{1000} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{1000} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{1000} = \frac{3}{12} \times \frac{6}{1000} + \frac{4}{12} \times \frac{8}{1000} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{1000}$$
$$= \frac{3 \times 6 + 4 \times 8 + 20}{12 \times 1000} = \frac{70}{12\,000} = \frac{7}{1\,200}$$

c. La pièce extraite est défectueuse ; calculer la probabilité qu'elle ait été façonnée par M_1. *1,5 points*

La formule de Bayes nous permet d'écrire :
$$P_D(M_1) = \frac{P(M_1)P_{M_1}(D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{6}{1000}}{\frac{7}{1\,200}} = \frac{\frac{3}{12} \times \frac{6}{1000}}{\frac{70}{12\,000}} = \frac{\frac{18}{12\,000}}{\frac{70}{12\,000}} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$$

d. Les événements M_1 et « la pièce extraite est défectueuse » sont-ils indépendants ? *1 point*

Concrètement, il semble que le taux de pièces défectueuses dépende de la machine. Mathématiquement, on peut remarquer que $P(M_1) = \dfrac{1}{4}$ et $P_D(M_1) = \dfrac{9}{35}$, donc $P(M_1) \neq P_D(M_1)$ ce qui signifie que M_1 et D sont dépendants.

2. Opération O_2 : les 6 000 pièces produites quotidiennement passent ensuite sur une machine unique M pour la finition. Il s'avère que chaque pièce a une probabilité égale à 0,015 d'être ratée par M, indépendamment du fait qu'elle ait été bien ou mal façonnée auparavant et indépendamment des autres pièces. On tire une pièce au hasard parmi les 6 000 produites quotidiennement, et ayant subi les 2 opérations. Calculer les probabilités des événements suivants :

a. Les 2 opérations ont été mal faites. *1,5 points*

En notant R_1 et R_2 les événements respectifs : « l'opération O_1 (resp. O_2) a été mal faite », alors on s'intéresse ici à $R_1 \cap R_2$
par indépendance (d'après l'énoncé), $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2)$
or $P(R_1) = P(D) = \dfrac{7}{1\,200}$ et $P(R_2) = \dfrac{15}{1\,000}$
$$\text{donc } P(R_1 \cap R_2) = \frac{7}{1\,200} \times \frac{15}{1\,000} = \frac{7 \times 15}{12} \times \frac{1}{100 \times 1\,000} = \frac{7 \times 5}{4} \times \frac{1}{100\,000} = \frac{7 \times 5}{4 \times 2 \times 5 \times 10\,000} = \frac{7}{80\,000}$$

b. La pièce est mal faite. *1,5 points*

On s'intéresse ici à $R_1 \cup R_2$ et d'après la formule de Poincaré :
$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2) = \frac{7}{1\,200} + \frac{15}{1\,000} - \frac{7}{80\,000}$$
$$\text{donc } P(R_1 \cup R_2) = \frac{7\,000 + 15 \times 1\,200 - 7 \times 15}{1\,200 \times 1\,000} = \frac{7\,000 + 18\,000 - 105}{1\,200\,000} = \frac{24\,895}{1\,200\,000} = \frac{4\,979}{240\,000}$$

c. Une seule opération a été mal faite. *1,5 points*

On s'intéresse donc ici à $\left(R_1 \cap \bar{R_2}\right) \cup \left(\bar{R_1} \cap R_2\right)$ (on « évite » $R_1 \cap R_2$)
or $R_1 \cap \bar{R_2}$ et $\bar{R_1} \cap R_2$ sont incompatibles
donc $P\left(\left(R_1 \cap \bar{R_2}\right) \cup \left(\bar{R_1} \cap R_2\right)\right) = P\left(R_1 \cap \bar{R_2}\right) + P\left(\bar{R_1} \cap R_2\right)$
et par indépendance $P\left(R_1 \cap \bar{R_2}\right) = P(R_1)P(\bar{R_2})$ et $P\left(\bar{R_1} \cap R_2\right) = P(\bar{R_1})P(R_2)$
donc $P\left(\left(R_1 \cap \bar{R_2}\right) \cup \left(\bar{R_1} \cap R_2\right)\right) = \dfrac{7}{1\,200} \times \dfrac{985}{1\,000} + \dfrac{1193}{1\,200} \times \dfrac{15}{1\,000} = \dfrac{6\,895 + 17\,895}{1\,200 \times 1\,000} = \dfrac{24\,790}{1\,200\,000} = \dfrac{2\,479}{120\,000}$

Note bene : on peut aussi remarque que la probabilité de cet événement est égale à la différence des deux précédents : $P(R_1 \cup R_2) - P(R_1 \cap R_2)$

3. Pour évaluer l'efficacité de ses machines, la responsable de l'atelier effectue tous les jours des vérifications approfondies sur un échantillon de 100 pièces.
Le tableau ci-dessous présente les résultats des tests et donnent le nombre de pièces de l'échantillon quotidien réussies par la machine M au cours du mois d'avril :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Pièces réussies	98	100	99	99	98	97	100	96	99	97	98	98	99	100	95

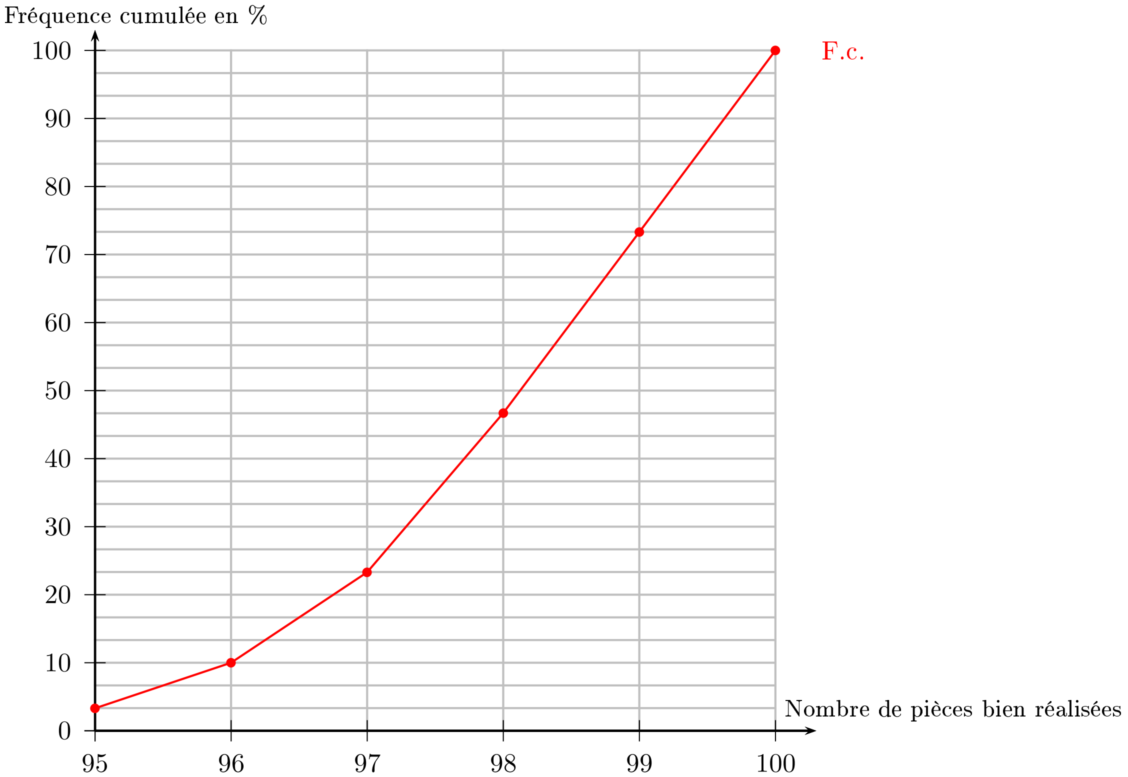
Jour	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Pièces réussies	100	100	99	100	97	98	99	99	100	100	97	99	98	96	98

a. Résumer dans un tableau les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées des différentes valeurs de la série statistique. *1,5 points*

Les valeurs prises par la série statistiques sont $[\![95, 100]\!]$ et plus précisément :

Valeurs	95	96	97	98	99	100
Effectifs	1	2	4	7	8	8
Fréquences	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$
Fréquences cumulées	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{11}{15}$	1

b. Représenter le diagramme des fréquences cumulées de cette série statistique. *1,5 points*



c. Déterminer l'étendue, les premier et troisième quartiles ainsi que la médiane de cette série statistique. *1,5 points*

Comme évoqué plus haut, l'étendue est $[95, 100]$ (ou $[\![95, 100]\!]$)

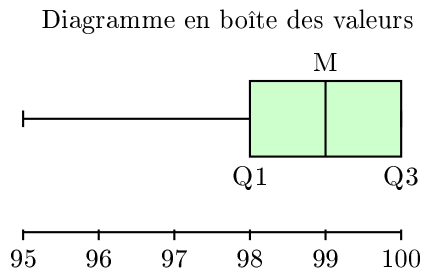
Comme il y a 30 valeurs, le quart des valeurs vaut $\dfrac{30}{4} = 7,5$ donc le premier quartile est la huitème valeur : $Q_1 = 98$ et de même Q_3 est la $23^{\text{ème}}$ valeur, $Q_3 = 100$

et comme il y a un nombre pair de valeurs, la médiane m vaut la moyenne des $15^{\text{ème}}$ et $16^{\text{ème}}$ valeurs

$m = \dfrac{99 + 99}{2} = 99$

d. Représenter le diagramme en boîte de cette série statistique. *1 point*

Avec les informations précécentes, on peut représenter la boîte à moustache. La série est tellement peu dispersée que le quatrième quart des valeurs n'est pas visible.



e. Déterminer la moyenne de cette série statistique. *1,5 points*
On cherchera à donner une valeur approchée.

Par définition, $\bar{x} = \dfrac{95 + 2 \times 96 + 4 \times 97 + 7 \times 98 + 8 \times 99 + 8 \times 100}{30} = \dfrac{2\,953}{30} = \dfrac{2\,940}{30} + \dfrac{13}{30} = 98 + \dfrac{13}{30} \simeq 98,4$

f. Sachant que $\overline{x^2} \simeq 9\,691$, donner une valeur approchée de la variance. *1 point*
On cherchera à préciser à l'unité près.

D'après la formule de Kœnig-Huygens, la variance vaut $s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

en prenant $98,4$ pour la moyenne, on trouver une valeur approchée de 8 pour la variance

l'arrondi nous fait perdre beaucoup de précision, puisqu'en réalité la variance vaut environ $1,85$

g. En supposant que vous disposez d'une série statistique similaire mais dont vous ne connaissez pas la longueur, écrire un programme Python qui calcule la moyenne et l'écart-type de la série statistique.
On supposera que la série de valeurs est contenue dans une liste `L` (prédéfinie dans Python). *2 points*

On peut simplement répondre par la commande : `sum(L)/len(L)` ou le faire « manuellement » en additionnant de manière itérative les termes de la liste et au passage en calculant l'effectif total :

```
somme=0
population=0

for i in range(0,len(L)) :
    somme=somme+L[i]
    population=population+1

moyenne=somme/population
print("la moyenne vaut", moyenne)
```

On fait de même pour la moyenne des carrés, puis on utilise la moyenne calculée précédemment pour l'écart-type :

```
somme2=0

for i in range(0,len(L)) :
    somme2=somme2+extrait[i]**2

ecart_type=np.sqrt(somme2/population-moyenne**2)
print("l'écart-type vaut", ecart_type)
```