Corrigés des exercices non abordés en classe et même un peu plus.

Exercice 6

Soit u la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\quad u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + e^{-k}\right)$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$

C'est évident car pour tout n, u_n est défini par un produit de termes strictement positifs.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on définit $f(x) = \ln(1+x) - x$

a. Etudier les variations de la fonction f

$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-(1+x)}{x} = \dfrac{-x}{1+x}$
donc sur $\mathbb{R}_+, f'$ est strictement négative et de fait f est strictement décroissante

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leqslant x$

D'après la question précédente, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
de plus $f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leqslant 0$ i.e. $\ln(1+x) - x \leqslant 0$ et donc $\ln(1+x) \leqslant x$

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$

$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \left(1+e^{-k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+e^{-k})$ (cf. chapitre sommes et produits)

or d'après la question précédente, $\forall k \in [\![0;n]\!], e^{-k} \geqslant 0 \Rightarrow \ln(1+e^{-k}) \leqslant e^{-k}$

et donc $\sum_{k=0}^{n} \ln(1+e^{-k}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} e^{-k}$ i.e. $\ln(u_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} e^{-k}$

or $\sum_{k=0}^{n} e^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-1}\right)^k = \dfrac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}} = \dfrac{1-e^{-(n+1)}}{1-\frac{1}{e}} = \dfrac{1-\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{e-1}{e}} = \dfrac{e}{e-1} \times \left(1 - \dfrac{1}{e^{n+1}}\right)$

or $1 - \dfrac{1}{e^{n+1}} \leqslant 1$ donc $\dfrac{e}{e-1} \times \left(1 - \dfrac{1}{e^{n+1}}\right) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$ i.e. $\sum_{k=0}^{n} e^{-k} \leqslant \dfrac{e}{e-1}$

or $\ln(u_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} e^{-k}$ donc $\ln(u_n) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$

4. Montrer que la suite u est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ (d'après **1.**) et par définition
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+e^{-k}\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(1+e^{-k}\right)} = \dfrac{\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+e^{-k}\right)\right) \times \left(1+e^{-(n+1)}\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(1+e^{-k}\right)}$
donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + e^{-(n+1)}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-(n+1)} > 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ (car $u_n \geqslant 0$)
i.e. u est croissante.

5. Montrer que la suite u est convergente.

D'après **3.**, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) \leqslant \dfrac{e}{e-1}$ donc par croissance de la fonction exponentielle, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{\ln(u_n)} \leqslant e^{\frac{e}{e-1}}$ i.e. $u_n \leqslant e^{\frac{e}{e-1}}$
donc la suite u est majorée, de plus elle est croissante (d'après la question **4.**), donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite u est convergente.

Exercice 8 - suites et fonctions le retour

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Dresser le tableau de variations (complet) de f, puis montrer que $\forall x \geqslant 1, f(x) - x \leqslant 0$
Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (addition de fonctions dérivables) et
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$
or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x+1 \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$
et $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$, on en déduit les tableaux de signe de f' et de variations de f, sachant également que $f(1) = 1$ (tableau complet signifie que l'on attend les limites, mais pour l'instant, nous ne les avons pas abordées).

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	-	0	$+$	
$f'(x)$	||	-	0	$+$	
f	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

par ailleurs $f(x) - x = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{x-1}{x}$ donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $1 - x$
or $1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$, de fait $\forall x \in]0,1], f(x) - x \geqslant 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) - x \leqslant 0$
enfin, $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc le seul cas d'égalité est pour $x = 1$

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

En admettant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie, alors, par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
or d'après la question précédente 1 est le minimum de f, donc $f(u_n) \geqslant 1$, i.e. $u_{n+1} \geqslant 1$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$
mais alors, comme vu précédemment, $\forall x \geqslant 1, f(x) - x \leqslant 0$ entraine $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) - u_n \leqslant 0$ (car $u_n \geqslant 1$) i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite est décroissante, à partir du rang 1.

3. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite. Qu'en est-il pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée (par 1), elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone, notons ℓ sa limite
comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$ on en déduit, par passage à la limite par l'inégalité, que $\ell \geqslant 1$ et donc $\ell \neq 0$
alors par propriété $u_{n+1} \to \ell$
et par opérations sur les limites (car $\ell \neq 0, u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1 \to \ell + \dfrac{1}{\ell} - 1$
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1$
donc par unicité de la limite $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell} - 1$, i.e. $f(\ell) = \ell$
or d'après **1.** $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ donc $\ell = 1$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 1 et il en est de même pour la suite La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car la notion de limite ne dépend pas des premiers termes (vu autrement, le théorème de la limite monotone s'applique si une suite est monotone à partir d'un certain rang).

Exercice 12 - un peu plus technique

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\quad u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

1. Soit n entier tel que $n \geqslant 3$. Pour k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-2$, encadrer le réel $\dfrac{k!}{n!}$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant k \leqslant n-2$, alors
$\dfrac{k!}{n!} = \dfrac{k!}{\prod_{i=1}^{n} i} = \dfrac{k!}{\prod_{i=1}^{k} i \prod_{i=k+1}^{n} i} = \dfrac{k!}{k! \prod_{i=k+1}^{n} i} = \dfrac{1}{\prod_{i=k+1}^{n} i}$

or $k \leqslant n-2 \Rightarrow k+1 \leqslant n-1$ donc $\displaystyle\prod_{i=k+1}^{n} i \geqslant (n-1)n$ et donc $\dfrac{1}{\prod_{i=k+1}^{n} i} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$

de plus $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!}$ donc $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$

2. Soit n entier tel que $n \geqslant 3$. Montrer que $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

D'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n-2, \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$

donc $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)}$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-2} 1 = \frac{1}{n(n-1)} \times (n-1) = \frac{1}{n}$

donc $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! \leqslant \dfrac{1}{n}$ et a fortiori $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ (car $n-1 \leqslant n \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$)

3. Soit n entier tel que $n \geqslant 3$. Exprimer u_n à l'aide de $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k!$

Par définition $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n!\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!}$

par relation de Chasles (pour le découpage de la somme) et car $n \geqslant 3$

donc $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! + \frac{1}{n} + 1$ car $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{(n-1)!}{n \times (n-1)!} = \dfrac{1}{n}$

4. Soit n entier tel que $n \geqslant 2$. Exprimer u_n à l'aide de $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k!$

la question n'est pas vraiment indispensable pour conclure (cf. la question ***5.****)*

de même qu'à la question **4.**, on écrit $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! + \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} k! + 1$

5. Montrer que la suite u converge vers 1

D'après la question précédente, $\forall n \geqslant 2, u_n \geqslant 1$ car $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \geqslant 0$

et d'après **3.**, $\forall n \geqslant 3, u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! + \frac{1}{n} + 1$

et donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} + 1$ car d'après **2** $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

donc $\forall n \geqslant 3, 1 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} + 1$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} + 1 = 1$ (limites usuelles, quotients et additions)

donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 13 - Exemples de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Par définition $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ (on a effectué le changement d'indice $i = k+1$)

les deux sommes contiennent une partie commune (télescopage), ce que l'on va mettre en évidence : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+n}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - 2n(2n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \dfrac{2n^2 + 3n + 1 + 2n^2 + 2n - 4n^2 - 2n}{2n(2n+1)(n+1)}$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+1}{2n(2n+1)(n+1)}$ et de fait $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante

On peut faire une manipulation similaire avec $v_{n+1} - v_n$ (changement d'indice et télescopage entre les deux sommes)

on peut aussi remarquer que v_n est proche d'u_n en faisant le changement de variable $k = i + n$, on trouve alors

$v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n} = \frac{1}{n} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+n} = \frac{1}{n} + u_n$

donc $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - \left(u_n + \dfrac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

or on a vu que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1}$ donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{2}{2n} + \dfrac{1}{2n+1} = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{-(2n+1)+2n}{2n(2n+1)} = -\dfrac{1}{2n(2n+1)}$

donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ donc (v_n) est décroissante

Enfin, comme nous l'avons montré $v_n = \dfrac{1}{n} + u_n \Rightarrow v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Pour continuer à s'entrainer

Exercice 16

Soit u la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, à l'aide d'un changement d'indice.

On s'exécute (en fait c'est exactement la même expression qu'à l'**exercice 13** :

par définition $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ (on a effectué le changement d'indice $i = k+1$)

les deux sommes contiennent une partie commune (télescopage), ce que l'on va mettre en évidence : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+n}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - 2n(2n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \dfrac{2n^2 + 3n + 1 + 2n^2 + 2n - 4n^2 - 2n}{2n(2n+1)(n+1)}$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+1}{2n(2n+1)(n+1)}$

2. Montrer que u est strictement croissante.

D'après le résultat précédent, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+1}{2n(2n+1)(n+1)}$

de fait $u_{n+1} - u_n > 0$ donc u est strictement croissante.

3. Montrer que u converge.

Comme la suite est croissante, on va chercher à montrer qu'elle est majorée pour appliquer le théorème de la limite monotone et pour cela, on va majorer le terme général de la somme (et donc minorer le dénominateur) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], n+k \geqslant n$ donc $\dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{1}{n}$ en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$ (le terme général de la somme ne dépend pas de k)

donc $u_n \leqslant 1$, donc u est majorée, de plus elle est croissante, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 17

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes, de même limite.

L'énoncé nous oriente vers le fait que u et v sont adjacentes, ce que l'on va démontrer.

Par définition, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right)$

donc $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2}$

$$= \frac{1+2\sqrt{n+1}^2-2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1+2(n+1)-2\sqrt{(n+2)(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$$

$= \dfrac{2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$ il faut donc étudier le signe de $2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)}$

or $2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n+3 \geqslant 2\sqrt{(n+2)(n+1)} \Leftrightarrow (2n+3)^2 \geqslant \left[2\sqrt{(n+2)(n+1)}\right]^2$
(on garde l'équivalence en élevant au carré car on ne manipule que des nombres positifs)
donc $2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geqslant 4(n+2)(n+1)$
$\Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geqslant 4(n^2+3n+2) \Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geqslant 4n^2+12n+8 \Leftrightarrow 1 \geqslant 0$
ce qui est vrai donc $2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ i.e. u est croissante
On effectue le même travail avec la suite v :
Par définition, $v_{n+1}-v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)$

donc $v_{n+1}-v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}$

$$= \frac{1+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1-2(n+1)+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$$

$= \dfrac{-2n-1+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$ il faut donc étudier le signe de $-2n-1+2\sqrt{n(n+1)}$

or $-2n-1+2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2n+1 \Leftrightarrow \left[2\sqrt{n(n+1)}\right]^2 \geqslant (2n+1)^2$ (on garde l'équivalence en élevant au carré car on ne manipule que des nombres positifs)
donc $-2n-1+2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow 4n(n+1) \leqslant 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 4n^2+4n \leqslant 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 1$
ce qui est vrai donc $-2n-1+2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 0$ et donc $v_{n+1}-v_n \leqslant 0$ i.e. v est décroissante
Enfin on étudie la limite de $u_n - v_n$, par définition

$u_n - v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}$

donc $u_n - v_n = 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$
nous sommes donc ramenés à l'étude de la limite d'une différence entre deux racines carrées, ce que l'on détermine avec la méthode du conjugué :

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\times\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}^2-\sqrt{n+1}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

donc $\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \dfrac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1} = +\infty$ (pour justifier on peut remarque que $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ par croissance de la fonction racine carrée puis par théorème des gendarmes version infinie)

donc par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$ et donc par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

donc les suites u et v sont adjacentes (nous avons vérifié) les trois conditions), de fait elles convergent et ont la même limite.

Exercice 18

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

On suppose que u est croissante. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant u_n$

Il suffit de remarquer que u étant croissante, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], u_k \leqslant u_n$

donc en additionnant les inégalités, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_n$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n = nu_n$ (car u_n ne dépend pas de k)

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant nu_n$ et donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \dfrac{1}{n} \times nu_n$ i.e. $v_n \leqslant u_n$