Corrigé *1 point par question*

On justifiera toutes les réponses (si c'est un résultat du cours, on le mentionne).

1. Si $q > 1$, que vaut $\lim_{n\to\infty} q^n$?

Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ (cours).

2. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{(\ln n)^2}$?

$\lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{(\ln n)^2} = +\infty$ par croissances comparées (cours)

3. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^2 - (\ln n)^{2021}}{5^n + n^{12} - 9}$?

On factorise par les termes dominants, 2^n au numérateur et 5^n au dénominateur :

$\frac{2^n + n^2 - (\ln n)^{2021}}{5^n + n^{12} - 9} = \frac{2^n}{5^n} \times \frac{1 + \frac{n^2}{2^n} - \frac{(\ln n)^{2021}}{2^n}}{1 + \frac{n^{12}}{5^n} - \frac{9}{5^n}}$

or par croissances comparées et limites usuelles :

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{2021}}{2^n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{12}}{5^n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{9}{5^n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

donc par opérations sur les limites : $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^2 - (\ln n)^{2021}}{5^n + n^{12} - 9} = 0$

4. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$?

On utilise la méthode de l'expression conjuguée :

$\sqrt{n+5} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \frac{n+5-n}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}}$

or $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = 0 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

donc $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n} = 0$

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée par 5, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge, d'après le théorème de la limite monotone. Mais on ne peut pas connaître sa limite (on sait qu'elle est inférieure ou égale à 5).

6. On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{2n+1}, \quad w_n = u_n + \frac{1}{n} \quad$ et $\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} v_n$?

$u_n = \frac{n}{2n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2n}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2n}}$ donc d'après les limites usuelles et les opérations sur les limites, $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Mais alors par opérations sur les limites à nouveau $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}$

et donc par théorème d'encadrement : $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}$

7. « Une suite bornée est convergente ». Vrai ou faux ?

Faux, cf. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n}$

En admettant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 0$, que peut-on dire sur $\lim_{n\to\infty} u_n$?

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n} < 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, et de plus minorée.
donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$
En admettant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, montrer qu'elle diverge vers $+\infty$
Supposons qu'elle soit majorée.
alors, étant de plus croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite ℓ
mais alors $u_{n+1} \to \ell$ également et donc en passant à la limite dans l'égalité :
$\ell = \ell^2 + 1$, i.e. $\ell^2 - \ell + 1 = 0$
or cette équation n'admet pas de racine (discriminant strictement négatif), c'est donc contradictoire.
donc la suite n'est pas majorée et de fait elle diverge vers $+\infty$

Option 2 : on pouvait conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$ et le démontrer par récurrence.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$
Compléter le programme ci-dessous pour qu'il donne la première valeur de n pour laquelle $u_n > 10^6$

```
u=5/2
n=0
while u<=10**6:
  u=u**2
  n=n+1
print(n)
```

La boucle while répond bien à ce type de problème (seuil), il faut préciser la condition (tant que le seuil n'est pas atteint) et calculer les termes de manière itérative. On incrémente le n à chaque passage pour suivre le rang et on l'affiche une fois la boucle terminée.

ECG 1- maths appli. **Interrogation rapide** **15 janvier 2025**

Corrigé

1 point par question

On justifiera toutes les réponses (si c'est un résultat du cours, on le mentionne).

1. Si $-1 < q < 1$, que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$?

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (cours).

2. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{4^n}$?

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{4^n} = 0$ par croissances comparées (cours).

3. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6^n + n^2 - (\ln n)^{11}}{5^n + n^{2021} - 9}$?
On factorise par les termes dominants, 6^n au numérateur et 5^n au dénominateur :
$$\frac{6^n + n^2 - (\ln n)^{11}}{5^n + n^{2021} - 9} = \frac{6^n}{5^n} \times \frac{1 + \frac{n^2}{6^n} - \frac{(\ln n)^{11}}{6^n}}{1 + \frac{n^{2021}}{5^n} - \frac{9}{5^n}}$$
or par croissances comparées et limites usuelles :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{6^n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{11}}{6^n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2021}}{5^n} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{9}{5^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$$
donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6^n + n^2 - (\ln n)^{11}}{5^n + n^{2021} - 9} = +\infty$

4. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$?
On utilise la méthode de l'expression conjuguée :
$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$$
or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 0 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+3}-\sqrt{n}=0$

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, d'après le théorème de la limite monotone. Mais on ne peut pas connaître sa limite (on sait qu'elle est supérieure ou égale à 1).

6. On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{2n+1}{n+1}, \quad w_n=u_n+\dfrac{1}{n} \quad$ et $\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$?
$u_n=\dfrac{2n}{n}\times\dfrac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}=2\times\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}$ donc d'après les limites usuelles et les opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=2$
Mais alors par opérations sur les limites à nouveau $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=2$
et donc par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=2$

7. « Une suite bornée est convergente ». Vrai ou faux ?

Faux, cf. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n^2}$
En admettant que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\leqslant 1$, que peut-on dire sur $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n^2}>0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et de plus majorée.
donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n^4+1$
En admettant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, montrer qu'elle diverge vers $+\infty$

Supposons qu'elle soit majorée.
alors, étant de plus croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite ℓ
mais alors $u_{n+1}\to\ell$ également et donc en passant à la limite dans l'égalité :
$\ell=\ell^4+1$ ce qui est impossible : en effet $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant 1(u_0=1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante) donc par passage à la limite dans l'inégalité $\ell\geqslant 1$
or $\ell^3\geqslant 0$ donc $\ell^4\geqslant\ell$ et donc $\ell^4+1>\ell$ d'où l'impossibilité et la contradiction
donc la suite n'est pas majorée et de fait elle diverge vers $+\infty$

Option 2 : on pouvait conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant n$ et le démontrer par récurrence.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=\dfrac{5}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n^2$
Compléter le programme ci-dessous pour qu'il donne la première valeur de n pour laquelle $u_n>10^6$

```python
u=5/2
n=0
while u<=10**6:
  u=u**2
  n=n+1
print(n)
```

La boucle while répond bien à ce type de problème (seuil), il faut préciser la condition (tant que le seuil n'est pas atteint) et calculer les termes de manière itérative. On incrémente le n à chaque passage pour suivre le rang et on l'affiche une fois la boucle terminée.