Corrigé *15 points*

Exercice 1 *5 points*

1. Calculer les limites suivantes : *4 points - 1 point par limite*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{2n}+e^{-n}+n}{n^3-\ln(n)+n^{-1}}$

En analysant l'expression, on remarque que les coefficients dominant sont e^{2n} au numérateur et n^3 au dénominateur. On factorise donc en conséquence et on utilise les croissances comparées :
$$\frac{e^{2n}+e^{-n}+n}{n^3-\ln(n)+n^{-1}} = \frac{e^{2n}(1+e^{-3n}+ne^{-2n})}{n^3\left(1-\frac{\ln(n)}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{e^{2n}}{n^3}\times\frac{1+e^{-3n}+ne^{-2n}}{1-\frac{\ln(n)}{n^3}+\frac{1}{n^4}}$$
et grâce aux croissances comparées : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2n}}{n^3}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^3}=0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} ne^{-2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^{2n}}=0$; aux limites usuelles : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}=0$ et aux opérations : $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^{3n}}=0$
finalement par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{2n}+e^{-n}+n}{n^3-\ln(n)+n^{-1}}=+\infty \left(\text{« } +\infty\times\dfrac{1}{1}\text{ »}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n-5^n}{4^n+5^n}$

Même démarche, en remarquant que 5^n domine au numérateur et au dénominateur.
$\dfrac{4^n-5^n}{4^n+5^n}=\dfrac{5^n\left(\frac{4^n}{5^n}-1\right)}{5^n\left(\frac{4^n}{5^n}+1\right)}=\dfrac{-1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$ (limite usuelle : q^n avec $|q|<1$)
donc par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n-5^n}{4^n+5^n}=\dfrac{-1+0}{1+0}=-1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^4+1}-n^2$

Encore une méthode officielle, l'utilisation du conjugué qui permet de calculer cette limite dont la forme initiale est indéterminée :
$\sqrt{n^4+1}-n^2=\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\times\dfrac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\dfrac{n^4+1-n^4}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$ or $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$
car $\sqrt{n^4+1}+n^2\geqslant n^2$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^4+1}+n^2=+\infty$ (gendarmes) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^4+1}-n^2=0$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)+5}{(\ln(n))^2+3n+1}$

De même, on factorise par les termes dominants ($3n$ au numérateur et $\ln(n)$ au dénominateur).
$$\frac{\ln(n)+5}{(\ln(n))^2+3n+1}=\frac{\ln(n)\left(1+\frac{5}{\ln(n)}\right)}{3n\left(\frac{(\ln(n))^2}{3n}+1+\frac{1}{3n}\right)}=\frac{\ln(n)}{3n}\times\frac{\left(1+\frac{5}{\ln(n)}\right)}{\left(\frac{(\ln(n))^2}{3n}+1+\frac{1}{3n}\right)}$$
Par croissances comparées (c.c.) et limites usuelles, on trouve :
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln(n))^2}{3n}=0$ (c.c.), $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{\ln(n)}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)}{3n}=0$ (c.c.) donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)+5}{(\ln(n))^2+3n+1}=0$ par opérations sur les limites

2. Pour une de ces quatre limites, écrire un programme avec Python qui permet d'émettre une conjecture sur la limite. *1 point*

Comme nous disposons de formules explicites, on peut d'emblée calculer les expressions pour des « grandes » valeurs de n.
Pour mieux appréhender l'évolution, on peut faire une boucle, éventuellement contenue dans une liste (cf. ci-contre) et/ou même une représentation graphique (cf. ci-contre).
Pour utiliser les fonctions $\ln, \exp$ ou $\sqrt{.}$, il faut importer `numpy` au préalable

```
u=[(4**n-5**n)/(4**n+5**n) for n in range(0,100)]
# avec la limite c) :
# import numpy as np
# u=[np.sqrt(n**4+1)-n**2 for n in range(0,100)]
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(u,'+')
plt.show()
```

Exercice 2 *10 points*

1. Soit P le polynôme défini par $P(x)=x^3-x^2+2$

a. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout $x\in\mathbb{R}, P(x)=(x+1)Q(x)$ *0,5 point*

Il suffit de vérifier que -1 est racine de P c'est-à-dire que $P(-1)=0$
En effet $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+2=-1-1+2=0$
donc P est factorisable par $x+1$, i.e. il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)=(x+1)Q(x)$

b. Déterminer le polynôme Q. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$ *2 points*

On détermine le degré de Q (pas obligatoire) : par propriété sur les degrés
$\deg P = \deg(x+1) + \deg Q = 1 + \deg(Q)$ or $\deg P = 3$ d'où $\deg Q = 3 - 1 = 2$
donc Q s'écrit sous la forme : $Q(x) = ax^2 + bx + c$
donc $(x+1)Q(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$
donc par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :
$a = 1, a + b = -1$ et $c = 2$ donc $a = 1, b = -1 - 1 = -2$ et $c = 2$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = x^2 - 2x + 2$ et donc $P(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
or Q n'admet pas de racine ($\Delta = -4$) et comme $a > 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) > 0$
donc $P(x)$ est du signe de $(x+1)$ donc $P(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty[$
de même $P(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$

2. Soit la suite u définie par $u_0 \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$ *1,5 points*

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$

Par récurrence ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 1$

Initialisation : u_0 existe et $u_0 \geqslant 1$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

par hypothèse u_n existe et $u_n \geqslant 1$ de fait $u_n \neq 0$ et donc $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$ i.e. u_{n+1} existe

de plus $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n^2 \geqslant 1$ (car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$)

par ailleurs $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 0$ donc $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 1$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. u_n existe et $u_n \geqslant 1$

b. Montrer que la suite u est croissante. *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n} - u_n = \dfrac{u_n^3 + 2 - u_n^2}{u_n} = \dfrac{u_n^3 - u_n^2 + 2}{u_n} = \dfrac{P(u_n)}{u_n}$
or $u_n \geqslant 1$ donc d'après l'étude de P à la question **1.b)**, on en déduit que $P(u_n) > 0$
de plus $u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ est un quotient de termes strictement positifs donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et ce pour tout entier n donc u est croissante (et même strictement).

Nota bene : on peut plus simplement remarquer que $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n^2 \geqslant u_n \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$

c. Montrer que la suite u n'est pas majorée et en déduire sa limite. *2,5 points*

Supposons que u est majorée, comme de plus u est croissante d'après la question **2.b)**, en appliquant le théorème de la limite monotone, on en déduit que u est convergente. Notons ℓ sa limite, alors d'une part, comme $u_n \geqslant 1$ pour tout n, on en déduit que $\ell \geqslant 1$ par propriété (passage à la limite dans l'inégalité) et entre autres que $\ell \neq 0$. Par ailleurs, par opération sur les limites :
$u_n^2 \to \ell \times \ell = \ell^2$ et, comme $\ell \neq 0$, $\dfrac{2}{u_n} \to \dfrac{2}{\ell}$ donc par addition, $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n} \to \ell^2 + \dfrac{2}{\ell}$, i.e. $u_{n+1} \to \ell^2 + \dfrac{2}{\ell}$

or par propriété $u_{n+1} \to \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = \ell^2 + \dfrac{2}{\ell}$

donc $0 = \ell^2 + \dfrac{2}{\ell} - \ell$ soit $0 = \dfrac{\ell^3 + 2 - \ell^2}{\ell}$ i.e. $\dfrac{P(\ell)}{\ell} = 0$ donc $P(\ell) = 0$, autrement dit ℓ est une racine de P
donc $\ell = -1$ ce qui est contradictoire (avec $\ell \geqslant 1$)
donc notre hypothèse de départ est fausse, donc u n'est pas majorée.
Pour conclure, on applique à nouveau le théorème de la limite monotone mais sachant cette fois que u est croissante et non majorée, de fait elle diverge vers $+\infty$

3. Avec Python, et en prenant $u_0 = 2$:

a. créer une liste qui contient les 100 premiers termes de la liste, puis les représenter graphiquement ; *1 point*

On calcule les termes de la suite de manière récursive et on les inclut progressivement dans une liste qu'on représente ensuite.

```
L=[2] #la liste ne contient que le premier terme initialement
u=2 # le premier terme de la suite
for n in range(1,100):
 u=u**2+2/u #on calcule le nouveau terme en fonction du précédent
 L.append(u) # on le rajoute dans la liste
plt.plot(L, '+') # par défaut, les abscisses sont 0, 1, ..., 99, ce qui convient ici
plt.show()
```

b. déterminer le rang pour lequel u_n dépasse 1 000 pour la première fois. *1 point*

On calcule de manière itérative les termes de la suite tant que le seuil n'est pas atteint, on fait donc une boucle `while`.
On trouve que le seuil est dépassé dès u_4

```
u=2
n=0
while u<1000 :
    u=u**2+2/u
    n=n+1
print(n,u)
```