Lycée La Pérouse - Kerichen **D.S. n°4** - 25 janvier 2025

ECG 1

Mathématiques appliquées

Mathématiques

Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ Sans calculatrice

Bon devoir !

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\ln(3)+\ln(9)=3\ln(3)$

b) $x\mapsto\sqrt{x+7}$ est définie sur $[-7;+\infty[$

c) $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est bijective de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$

d) la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien

e) une fonction surjective est injective

f) une suite géométrique est toujours convergente

g) une suite décroissante et majorée est convergente

h) la suite définie pour tout entier n par $u_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ diverge

i) si $\forall n\in\mathbb{N}, v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

j) pour tous événements A et $B, P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

Exercice 2

A la maison du don de Brest, 200 personnes viennent quotidiennement effectuer un don de sang.
Il existe trois types de don : don de sang total, don de plasma et don de plaquettes.
Un examen préalable au don est effectué par un médecin, qui détermine la possibilité de donner ou non.

La répartition quotidienne des candidats au don est la suivante :

- 120 personnes viennent faire un don de sang total et parmi elles, en moyenne, 4% ne peuvent pas effectuer le don ;
- 50 personnes viennent faire un don de plasma et parmi elles, en moyenne, 1% ne peuvent pas effectuer le don ;
- 30 personnes viennent faire un don de plaquettes et parmi elles, en moyenne, 2% ne peuvent pas effectuer le don.

On se propose de noter les événements de la façon suivante :

- D_1 : « une personne vient faire un don de sang total » ;
- D_2 : « une personne vient faire un don de plasma » ;
- D_3 : « une personne vient faire un don de plaquettes » ;
- V : « la personne candidate au don peut effectuer le don ».

1. Au cours d'une journée, on choisit, au hasard, un candidat au don.

  a. Quelle est la probabilité que ce candidat ait pu effectuer le don ?

  b. Un candidat n'a pas pu effectuer le don ; calculer la probabilité qu'il s'agissait d'un don de plasma.

  c. Les événements D_3 et V sont-ils indépendants ?

2. On suppose que tous ces candidats reviennent faire un deuxième don et que, de manière indépendante au premier, 2% d'entre eux ne peuvent pas effectuer le deuxième don.
Pour un candidat au don pris au hasard, calculer les probabilités des événements suivants :

  a. Les 2 deux dons ont été effectués.

  b. Au moins un don a été effectué.

  c. Un don n'a pas été effectué.

3. Le tableau ci-dessous présente le nombre de dons qui n'ont pas pu être effectués chaque jour au cours du mois de novembre :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Dons non effectués	3	5	3	2	4	1	1	2	2	3	4	1	2	1	2

Jour	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Dons non effectués	6	1	2	3	3	4	2	5	1	4	3	2	2	1	3

  a. Résumer dans un tableau les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées des différentes valeurs de la série statistique.

  b. Représenter le diagramme des fréquences cumulées de cette série statistique.

  c. Déterminer l'étendue, les premier et troisième quartiles ainsi que la médiane de cette série statistique.

d. Représenter le diagramme en boîte de cette série statistique.

e. Déterminer la moyenne de cette série statistique.

f. Déterminer une valeur approchée de la variance.

4. Avec Python, on supposant qu'on dispose d'une série statistique (dont on ne connait pas la longueur), et dont les valeurs sont contenues dans un liste `L` (définie dans Python).
Ecrire un programme Python qui calcule la moyenne de la série statistique.

Exercice 3 - calcul de limites

Déterminer les limites des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \dfrac{4^n + 7^n}{6^n + (-1)^n}$

2. $w_n = \dfrac{e^{-n} - (\ln(n))^3 + n^{-4}}{(\ln(n))^4 - n^2 + 1}$

3. $v_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1}$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -\dfrac{1}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{3^n}$

1. Calculer u_1 et u_2

2. Montrer : $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 2^{n-2}$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4. Utilisation d'une suite auxiliaire. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2 \times 6^n}$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6^i}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (v_{i+1} - v_i)$

c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de v_n en fonction de n

d. Déduire de **c.** que pour tout entier n, on a : $u_n = \dfrac{1}{5}\left(2^{n+1} - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$

e. Retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Avec Python

a. Ecrire une fonction Python, qui pour un entier n, renvoie le terme u_n de la suite.

b. Représenter graphiquement la suite jusqu'au terme u_{100}

c. Ecrire un programme Python qui renvoie le premier rang n pour lequel $u_n \geqslant 10^6$

Exercice 5 - étude de fonction et suite

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$

1. **a.** Pour tout réel $x > 0$, calculer la valeur de $g'(x)$, la dérivée de g

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)$? en déduire $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

   c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

   d. Dresser le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$ en faisant figurer $g(1)$ et les résultats obtenus aux questions **1.b.** et **1.c.**

   e. Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$

   a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   b. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que peut valoir sa limite ? (on admet : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$)

   c. Etudier le signe de $g(x) - x$ pour $x > 0$

   d. En supposant $u_0 > 1$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$

   e. Toujours avec $u_0 > 1$, en déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   f. Si $u_0 > 1$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

   g. Que se passe-t-il si $u_0 = 1$ et si $u_0 < 1$?

Exercice 6

On définit l'application f par $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f
2. Déterminer $f\langle[0, +\infty[\rangle$
   On cherchera à justifier la limite en $+\infty$
3. Montrer que f n'est pas surjective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$
4. Montrer que f est injective.
5. Démontrer que f est une bijection de $\mathscr{D}_f$ dans un intervalle que l'on précisera et donner sa bijection réciproque.
6. Avec Python, définir la fonction f, puis la représenter sur l'intervalle $[0, 10]$