

Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- calculer une limite de fonction en utilisant :
 - ▷ les fonctions de référence;
 - ▷ les opérations sur les limites;
 - ▷ la composition de fonctions;
 - ▷ les croissances comparées;
 - ▷ les encadrements;
 - ▷ les variations : théorèmes de la limite monotone.
- calculer la limite d'une suite de type $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, connaissant les limites de f et de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- définir et justifier la continuité d'une fonction.
- compléter les études de fonctions continues en utilisant les théorèmes généraux : **théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.**
- compléter les représentations graphiques de fonctions à l'aide des nouveaux outils

Les limites de suites nous donnent un cadre pour les limites de fonction dès lors que x tend vers $+\infty$ et nous disposerons des résultats analogues : limites de référence, opérations sur les limites, théorèmes d'encadrement (gendarmes), de croissances comparées, de la limite monotone...

Mais l'objectif de ce chapitre est également de parler des limites de fonctions en un point, par exemple comment définir $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$?

Ci-dessous et sauf exception, on s'intéresse à une fonction f définie sur un intervalle I

1 Limites, définitions

1.1 Limites en $+\infty$ ou $-\infty$

1.1.1 Limites finies

<p><u>Définition</u> : soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si</p> $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall x \geq A, f(x) - \ell \leq \varepsilon$ <p>on notera alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$</p> <p>Par analogie, on peut alors définir la limite en $-\infty$ (en changeant juste $\forall x \geq A$ en $\forall x \leq A$)</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 5} = 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
--	--

Remarques :

- comme pour les suites, ces définitions cherchent à traduire que « l'écart entre f et ℓ peut être aussi petit que souhaité à partir d'une certaine valeur de x » ;
- $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$
- on ne dira pas « f converge vers ... » mais on utilise parfois d'autres formulations telles que : « f admet ℓ pour limite en $+\infty$ ».

1.1.2 Limites infinies

<p><u>Définitions</u> : on dit que f tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ si</p> $\forall M > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \geq M \text{ (resp. } \forall M < 0 \dots \forall f(x) \leq M \dots)$ <p>on notera alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$ (resp. $\dots = -\infty$)</p> <p>on définit de même les limites quand x tend vers $-\infty$</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
---	---

1.2 Limite en un point

On s'intéresse maintenant à la notion de limite en un point, c'est-à-dire quand x se rapproche d'un réel x_0 , où x_0 est un élément de I ou une extrémité de I (par exemple 1 est une extrémité de l'intervalle $[0; 1]$).

1.2.1 Limite infinie en un point

<p><u>Définitions</u> : on dit que f tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) quand x tend vers x_0 si</p> $\forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad f(x) \geq M$ <p style="text-align: center;">(resp. $\forall M < 0 \dots f(x) \leq M$)</p> <p>on notera alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ (resp. $\dots = -\infty$)</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ <p>avec f définie sur \mathbb{R}_+^*</p> <p>par $f(x) = \frac{1}{x^2}$, alors</p> $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
--	---

Remarques :

- la définition traduit la notion « $f(x)$ devient infiniment grand quand x se rapproche de x_0 » ;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'a pas de sens pour l'instant car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur \mathbb{R}^* qui n'est pas intervalle.

1.2.2 Limite finie en un point

Dans ce paragraphe, ℓ désigne un nombre réel (x_0 un élément ou une extrémité de I).

<p><u>Définition</u> : on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si</p> $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad f(x) - \ell \leq \varepsilon$ <p>on notera alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell$</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ <p>(cf. plus bas)</p>
---	--

Remarque : là aussi, on retrouve « $f(x)$ se rapproche indéfiniment de ℓ quand x se rapproche de x_0 ».

1.2.3 Limite à droite, à gauche

Toutes les définitions précédentes concernant les limites en un point peuvent être restreintes « à droite » ou « à gauche », en remplaçant $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ par :

<ul style="list-style-type: none"> • $I \cap]x_0, x_0 + \alpha]$ pour une limite à droite, on note alors $\lim_{a^+} f \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ <ul style="list-style-type: none"> • $I \cap [x_0 - \alpha, x_0[$ pour une limite à gauche, on note alors $\lim_{a^-} f \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$	<p><u>Exemples</u> : on peut alors parler de</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et de}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
---	---

1.2.4 Extension à une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$

Les définitions précédentes nous restreignent à des fonctions définies sur un intervalle mais on peut les étendre, par exemple les définitions des limites en point dans le cas où $f(x_0)$ n'est pas défini, avec $x_0 \in I$. Pour cela, on exclut x_0 dans la définition : $\forall x \in I \cap ([x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha])$, et on note alors $\lim_{\substack{a \\ x \neq a}} f$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$. Par exemple : cela nous autorise à définir $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x^2}$ qui vaut $+\infty$

<p><u>Propriété</u> : soit f une fonction définie sur un ensemble du type $(\cdot, x_0[\cup]x_0, \cdot)$, alors</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_a f = \ell$ si et seulement si $\lim_{a^+} f = \ell$ et $\lim_{a^-} f = \ell$ • $\lim_a f = +\infty$ si et seulement si $\lim_{a^+} f = +\infty$ et $\lim_{a^-} f = +\infty$ • $\lim_a f = -\infty$ si et seulement si $\lim_{a^+} f = -\infty$ et $\lim_{a^-} f = -\infty$
--

Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ alors, $\lim_{0^+} f = 1$ et $\lim_{0^-} f = 1$
 f n'est pas définie en 0
 mais f admet une limite en 0, et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
3. soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{x}{|x|}$
 alors si $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = -1$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. De même $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
 donc f n'admet pas de limite en 0

1.3 Unicité de la limite

Théorème : si une fonction admet une limite finie, en un point ou en $+$ ou $-\infty$, alors sa limite est unique.

Remarque : cette propriété est valable pour toutes les limites finies définies précédemment, y compris limite à droite et limite à gauche. Attention, dans le cas où elles existent, cela ne veut pas dire pour autant que les limites à droite et à gauche sont les mêmes (cf. exemple **3** ci-dessus).

On ne parle pas d'unicité pour les limites infinies mais une fonction ne peut pas non plus avoir deux limites infinies « différentes ».

2 Limites de référence

2.1 Fonctions puissances

Propriétés sur les fonctions puissances entières : soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- si n est **pair** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- si n est **impair** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Propriétés sur les fonctions puissances quelconques (dont la racine carrée) : soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

en particulier ($\alpha = \frac{1}{2}$) : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Remarque : les puissances quelconques contiennent aussi les puissances entières.

2.2 Logarithme népérien et exponentielle

Propriétés : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

3 Opérations sur les limites

Toutes les opérations vues sur les suites restent valables pour les fonctions. La nouveauté vient du fait qu'il existe des limites en un point ou en $+$ ou $-\infty$

En particulier, les résultats sont valables lorsqu'il s'agit de limites à droite ou à gauche.

3.1 Somme, produit par un nombre réel

$\lim f(x) \backslash \lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	FI
$-\infty$			$-\infty$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$\lim f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \lambda f(x)$, avec $\lambda > 0$	$\lambda \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \lambda f(x)$, avec $\lambda < 0$	$\lambda \ell$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque :

il y a un type de forme indéterminée pour l'addition « $+\infty - \infty$ »

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 7x) = \text{FI}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x + 15) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x + 5) = 5$

3.2 Produit

$\lim f(x) \backslash \lim g(x)$	$\ell' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\ell \ell'$	0	∞	∞
0		0	FI	FI
$+\infty$			$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$				$+\infty$

∞ signifie que la limite dépend du signe de ℓ

Remarque : il y a un type de forme indéterminée pour le produit « $0 \times \infty$ »

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2-x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - 3 \right) = -\infty$

3.3 Inverse et quotient

Dans cette section, on ne peut pas déterminer les limites du type « $\frac{*}{0}$ » si on ne connaît pas le signe du dénominateur.

On se limitera donc au cas où le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif (que l'on note ici 0^+) ou strictement négatif (noté ici 0^-).

$\lim f(x)$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Exemples : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3 - 1} = +\infty$

Le tableau suivant donne $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$:

$\lim f(x) \backslash \lim g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$ si $\ell > 0$, $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$, $+\infty$ si $\ell < 0$	0	0
0	0	FI	FI	0	0
$+\infty$	∞	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$-\infty$	∞	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Remarque : il y a deux types de formes indéterminées pour le quotient « $\frac{0}{0}$ », et « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Exemples : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(x) + x} = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -7 \\ x > -7}} \frac{x+3}{x+7} = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x+2}{(x-2)(x+5)} = -\infty$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4} = -\infty$

4 Limite d'une composée d'applications

<p><u>Propriété</u> :</p> <p>soient I et J deux intervalles de \mathbb{R}, f une fonction définie sur I, g une fonction définie sur J, telles que $f(I) \subset J$</p> <p>Soit x_0 un élément de I ou une extrémité de I (ici x_0 peut être un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$).</p> $\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = X_0 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = L$ $\text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$ <p>Ce résultat est valable pour X_0 et L étant des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$</p>	<p><u>Exemple</u> : avec $a > 0$ et $a \neq 1$,</p> <p>$\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln(a)}$ et donc</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$ <p>En effet (dans le cas n°1), si $a \in]0; 1[$ alors $\ln a < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty$, de plus</p> $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
--	---

Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + 5\right)^9 = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + 5\right) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^9 = -\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ puis par produit
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+3} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+3) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$ (limite en 1^+) $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + 25} = 5$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 25\right) = 25$ et $\lim_{X \rightarrow 25} \sqrt{X} = 5$

Composition par une suite

Nous l'avons déjà entrevu à travers des exercices, si par exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) alors on souhaite pouvoir écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{u_n} = e^\ell$. C'est ce que permet la propriété suivante :

<p><u>Propriété</u> : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous des éléments de I (donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n)$ est défini) :</p> $\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et si } \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$ <p>ℓ est donc un élément ou une extrémité de I (donc ℓ peut être un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$), et de même L peut être un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(3^n) = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{2^n}} = \sqrt{4} = 2$
--	--

5 Croissances comparées, gestion des formes indéterminées

5.1 Propriétés de croissances comparées

<p>a) Puissances et logarithme : avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \right)$ <p>b) Puissances et exponentielle : avec $a > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$,</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^\beta} = +\infty \text{ et avec } n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{ax} = 0$ <p>c) Logarithme et exponentielle : $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{(\ln x)^\alpha} = +\infty$</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \sqrt{x}} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$
---	--

Remarque : on résume en disant que « les puissances l'emportent sur le logarithme » et que « l'exponentielle l'emporte sur les puissances » (et de fait « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme »).

5.2 Transformation d'expressions pour lever une forme indéterminée

Comme pour les suites, on utilisera notamment la « factorisation par le plus gros », mais aussi l'expression conjuguée (pour la différence entre des racines).

Cas particulier des fonctions polynomiales, ou des fonctions rationnelles

Voici un résultat non officiel, mais qu'il est bon d'avoir en tête, tout en sachant le démontrer (une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynomiales).

Propriétés : pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$:

- la limite d'une fonction polynomiale est égale à la limite du terme de plus haut degré.
- la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Démonstration avec des exemples :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 + 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ car $x^3 + 2x^2 + 5x - 9 = x^3 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 3x + 4}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x = +\infty$ car $\frac{3x^2 - 3x + 4}{2x + 3} = \frac{3x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{3x^2}\right)}{2x \left(1 + \frac{3}{2x}\right)}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^6 + x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ car $\frac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^6 + x^3 + 1} = \frac{2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right)}{x^6 \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right)}$

Pour une limite en a avec a un nombre réel, on commence par simplifier la fraction rationnelle. Si la limite d'une expression polynomiale vaut 0 en un point, c'est que ce point est une racine.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$ car $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \frac{4}{7}$ car $\frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+2}{x+5}$

Autres exemples

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = 0$ par la technique du conjugué : $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$
donc $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \frac{x - (x-1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x \ln(x)) = -\infty$ en factorisant par x : $x - x \ln(x) = x(1 - \ln(x))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - x) = +\infty$ en factorisant par x : $xe^x - x = x(e^x - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$ en factorisant par le terme dominant : $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x} - 3e^x) = +\infty$ en factorisant par le terme dominant : $xe^{2x} - 3e^x = xe^{2x} \left(1 - \frac{3}{xe^x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par composition et car $xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

6 Limites et inégalités

Dans cette section, x_0 désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

6.1 Passage à la limite dans une inégalité

<p><u>Propriété</u> : f et g sont deux fonctions avec $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ (ℓ et ℓ', des réels)</p> <p style="text-align: center;">si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$</p> <p>en particulier,</p> <p><u>Propriété</u> : si f est une fonction positive (i.e. $\forall x \in I, f(x) \geq 0$) alors $\ell \geq 0$ ($\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$)</p>	<p><u>Exemple</u> :</p> <p>avec $f(x) = \exp(g(x))$ où g est une fonction définie sur \mathbb{R}</p> <p>si f admet une limite en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$</p> <p>car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$</p>
---	---

\triangle Les inégalités concernant les limites sont toujours **larges**.

En effet, comme pour les suites, quand bien même on a $\forall x \in I, f(x) > 0$, on ne peut pas pour autant en déduire $\ell > 0$

Pour s'en convaincre : $f(x) = \frac{1}{x} > 0$, dont la limite en $+\infty$ est 0

Autre exemple : soit $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$

on a bien, $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) < g(x)$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

6.2 Théorème des gendarmes

<p><u>Propriétés</u> : soit f, g, h trois fonctions telles que : $\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$</p> <p>si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$</p>
--

Exemple : soit s une fonction définie sur \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq s(x) \leq 1$

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{3 - s(x)}{x - 3}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq -s(x) \leq 1$ donc $2 \leq 3 - s(x) \leq 4$ et donc pour $x > 3$, $\frac{2}{x - 3} \leq \frac{3 - s(x)}{x - 3} \leq \frac{4}{x - 3}$

on conclut par théorème des gendarmes car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 3} = 0$

6.3 Théorème de comparaison (ou gendarmes version infinie)

<p><u>Propriétés</u> : soit f et g deux fonctions telles que :</p> <p style="text-align: center;">$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$</p> <p>1) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$</p> <p>2) si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$</p>	<p><u>Exemples</u> :</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ car $\lfloor x \rfloor \leq x$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ car $\lfloor x \rfloor \geq x - 1$</p>
--	--

6.4 Théorème de la limite monotone

De même que pour les suites, une fonction monotone admettra forcément une limite (finie ou infinie) aux bornes de chaque intervalle de définition.

Il s'agit donc des deux bornes : par exemple en 0 et en $+\infty$ si la fonction est définie sur $]0; +\infty[$; ou même en $-\infty$, en 0^- , en 0^+ et en $+\infty$ si elle est définie sur \mathbb{R}^*

Théorème de la limite monotone : soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$

où a et b peuvent être des nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$

1) si $x_0 \in I$, alors f admet une limite finie à gauche et à droite en x_0

2) si $x_0 = a$

a. si f est croissante alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est minorée (limite finie)} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

b. si f est décroissante alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est majorée (limite finie)} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

3) si $x_0 = b$

a. si f est croissante alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est majorée (limite finie)} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

b. si f est décroissante alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est minorée (limite finie)} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple : montrer que la fonction définie par $f(x) = x \ln(x)$ admet une limite finie en 0

on trouve $f'(x) = \ln(x) - 1$ donc $f'(x) < 0$ sur $]0, e^{-1}[$

de plus $\forall x \in]0, e^{-1}[$, a fortiori $x < 1$, donc $\ln(x) < 0$ et donc $f(x) < 0$

donc sur $]0, e^{-1}[$, f est décroissante et majorée par 0 donc d'après 2)a. f admet une limite finie en 0

Remarque : attention le premier point ne signifie pas qu'une fonction monotone admet une limite en tout point. Par exemple, la fonction partie entière est **croissante** mais $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$

7 Continuité

7.1 Continuité en un point

Définition : soit I est toujours un intervalle de \mathbb{R} , a un nombre appartenant à l'intervalle I , et f une fonction définie sur I .

1) on dit que f est **continue en a** lorsque : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2) (si $I \neq \dots, a]$), on dit que f est **continue à droite en a** si : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

3) (si $I \neq [a, \dots)$), on dit que f est **continue à gauche en a** si : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

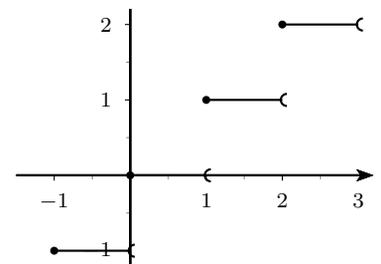
Remarque : cette définition cherche à traduire « (localement) on peut parcourir \mathcal{C}_f autour du point $(a, f(a))$ sans lever le crayon »

Exemple : la fonction partie entière est l'exemple typique de fonction **discontinue**. En effet, on ne peut pas définir $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$;

et encore moins dire $\lim_{x \rightarrow 2} [x] = [2] = 2$

En particulier $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$

on peut donc seulement dire que $[.]$ est **continue à droite en 2**



Propriété : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, et $a \in I$ (f est donc définie en a), avec a qui n'est pas une extrémité de I , alors :

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite en a et à gauche en a

Exemple : soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f est **continue à gauche en 0**, en effet $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ mais f **n'est pas continue (non contin. à droite en 0)** en effet, $\forall x > 0, f(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $f(0) = 0$

Exemple : « rendre une fonction continue »

Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Il faut que k soit égal à 5 car $\lim_{0^-} f = 5$ et $\lim_{0^+} f = f(0) = k$

Pour quelle(s) valeur(s) de k , f est-elle continue en 0 ?

7.2 Continuité sur un intervalle

Définition : I est toujours un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, on dit que f est **continu sur** I si f est continue en tout point a de I , on note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des applications continues de I dans \mathbb{R}

Remarques :

- $f \in \mathcal{C}(I)$ ou $f \in \mathcal{C}^0(I)$ signifie que f est continue sur I
- f est continue sur un intervalle I signifie concrètement que l'on peut tracer \mathcal{C}_f sans lever le crayon.
- on peut définir la continuité plus généralement, avec \mathcal{D} qui n'est pas un intervalle (par exemple une réunion d'intervalles) : on dit que f est continue sur \mathcal{D} lorsque f est continue en tout a de \mathcal{D}
Par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* (qui n'est pas un intervalle).

Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors f est continue sur \mathbb{R} . En effet, pour $a \in \mathbb{R}$, quelconque, par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$
 $x \mapsto 2x + 1$
2. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ F est continue sur \mathbb{R} , car elle est continue sur $] - \infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$, et en 0

Propriété : les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynômes), valeur absolue, racine carrée, exponentielle, logarithme népérien, puissances, sont continues sur leur domaine de définition.

Exemples : grâce à cette propriété, on peut affirmer

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \text{ (si } a \geq 0) \quad \lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = \ln(a) \text{ (lorsque } a > 0) \quad \text{etc...}$$

7.3 Opérations sur les applications continues

Propriétés : soit a un élément de I et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. si f et g sont continues en a , alors λf , $f + g$ et fg sont continues en a si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a
2. si f et g sont continues sur I , alors λf , $f + g$ et fg sont continues sur I si de plus g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

Propriétés - composition :

si f et g sont continues et si $g \circ f$ est définie, alors $g \circ f$ est continue

Exemple : soit $g(x) = \frac{1}{x+1}$, alors g est continue sur $] - 1, +\infty[$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto x + 1$ qui est continue (fonction affine) et ne s'annule pas sur $] - 1, +\infty[$

Exemples pour la composition :

soit $g(x) = \frac{1}{x+1}$ alors g est continue sur $] - \infty, -1[$ et sur $] - 1, +\infty[$ car les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x + 1$ sont continues respectivement sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et sur \mathbb{R}

soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

alors f est continue car bien définie et $x \mapsto x^2 + 1$ et la fonction \ln sont continues.

7.4 Continuité et suites

Propriété : soit $a \in I$. Si f est continue en a , alors : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes dans I qui converge vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$

Exemples : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/n} = e^0 = 1$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+2) - \ln(n+1) =$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln 1 = 0$

Remarque : si une suite est définie par u_0 puis de manière récursive par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, alors la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (vers une limite ℓ) entraîne la convergence de $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f(\ell)$ et on retrouve $f(\ell) = \ell$

8 Théorèmes généraux

8.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $k = f(c)$

Remarque : autrement dit, si f est continue, on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon et on passe donc par toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. toutes les « valeurs intermédiaires »).

Exemples :

1. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
alors l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-1, 0]$ et dans $[2, 3]$
en effet, f est continue, $f(-1) = -2$ et $f(0) = 2$ et on conclut avec le TVI (idem sur $[2, 3]$).
2. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$
alors e admet un antécédent par f , compris entre -1 et 0
en effet, f continue sur \mathbb{R} , $f(0) = 2$ et $f(-1) = e + 3$. Comme $2 \leq e \leq e + 3$, $f(0) \leq e \leq f(-1)$,
et donc d'après le TVI, e admet un antécédent par f , entre -1 et 0 ($\exists c \in [-1, 0]$ tel que $f(c) = e$).

Pour la suite, on rappelle qu'un intervalle de \mathbb{R} est une partie de \mathbb{R} « en un seul morceau » (qui « n'a pas de trou »).

Théorème des valeurs intermédiaires (bis) :

l'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle
(i.e. si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle).

Ces deux théorèmes sont équivalents (d'où l'homonymie).

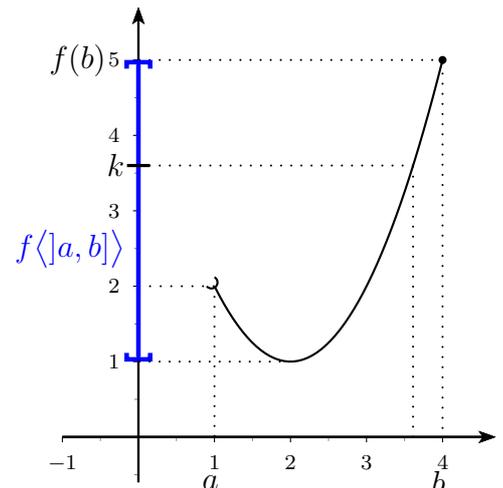
Remarque : autrement dit, si f est continue, et si l'ensemble de départ « n'a pas de trou », alors l'image directe de l'ensemble de départ « n'a pas de trou ».

Exemples où le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas :

- si f n'est pas continue : l'image de \mathbb{R}_+ par la fonction $[\cdot]$ est \mathbb{N}
- si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle : l'image de $[-1; 0[\cup]0; 1]$ par la fonction inverse est $] -\infty, -1] \cup [1; +\infty[$ (ici un trou au départ entraîne un trou à l'arrivée).

Remarques :

- l'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle, mais pas nécessairement de même nature (par exemple l'image de \mathbb{R}_- par \exp est $]0, 1]$).



- grâce au TVI, on peut lire l'intervalle $f\langle [a, b] \rangle$ dans le tableau de variations (ou sur un graphique).

Exemple d'application : soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 f est continue et dérivable sur \mathbb{R} , de plus $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	1	0

donc f est **croissante sur \mathbb{R}_-** et **décroissante sur \mathbb{R}_+** , de plus $\lim_{-\infty} f = 0 = \lim_{+\infty} f$

c'est la continuité et le TVI qui permettent de déterminer réellement les images directes, toutes les valeurs intermédiaires étant atteintes (le tableau de variations et le graphique l'illustrent bien) :

- $f\langle [0, 2] \rangle = [f(0), f(2)] = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$ car f est décroissante sur \mathbb{R}_+
- $f\langle [-1, 1] \rangle = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- $f\langle]-1, +\infty[\rangle =]0, 1]$

Propriété - corollaire du TVI : soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$
 si f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec $k = 0$

Remarque - corollaire du corollaire par contraposée du corollaire

si I est un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue qui ne s'annule pas sur I , alors f garde un signe constant sur I

Exemples :

- soit $f(x) = e^{-x} - 2x$, alors f s'annule sur $]0, 1[$ car f est continue, $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} - 2 < 0$
- l'équation $\ln(x) + 1 = -2x$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e}\right]$

en effet, avec $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x) + 1 + 2x$ l'application f est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+^*

de plus $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} > 0$ et $f\left(\frac{1}{e^3}\right) = -2 + \frac{2}{e^3} < 0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]e^{-3}, e^{-1}[$ tel que $f(x) = 0$

8.2 Image d'un segment par une application continue

Comme nous l'avons vu, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, mais pas forcément de même nature. Mais lorsque l'intervalle est un segment, i.e. $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors son image par une fonction continue est aussi un segment.

Théorème des bornes :

si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est **bornée et atteint ses bornes**, autrement dit, elle admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$

Remarques :

- autrement dit, si f est continue $f\langle [a, b] \rangle = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f \right]$, on note aussi $\left[\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x) \right]$
- incidemment, **l'image directe d'un segment par une fonction continue est un segment**
- plus précisément, si f est une fonction continue
 - ▷ si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f\langle [a, b] \rangle = [f(a), f(b)]$
 - ▷ si f est décroissante sur $[a, b]$, alors $f\langle [a, b] \rangle = [f(b), f(a)]$

Contre-exemple avec une fonction non continue :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f n'est pas continue en 0
 $f\langle [0, 1] \rangle =]0, 1]$,
 f admet un **maximum : 1, atteint en 0 et 1**,
 mais **pas de minimum**.

8.3 Continuité et monotonie

I désigne toujours un intervalle de \mathbb{R}

Théorème de la bijection : soit f une fonction continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I dans J , où $J = f\langle I \rangle$ et J est un intervalle dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I

Démonstration : f est injective car elle est strictement monotone et surjective de I sur $f\langle I \rangle$ par définition de $f\langle I \rangle$

de plus, d'après le TVI, $J = f\langle I \rangle$ est un intervalle (car f est continue)

d'après le théorème de la limite monotone, f admet des limites aux extrémités de I et la monotonie de f entraîne que les extrémités de J sont les limites de f aux extrémités de I

Remarque :

1. comme le suggère la démonstration, la continuité n'est pas nécessaire pour réaliser une bijection de I sur $f\langle I \rangle$ (la stricte monotonie suffit). La continuité permet d'affirmer que $f\langle I \rangle$ est un intervalle.
2. si I est en partie fermé, alors la limite devient la valeur de f au point donné par continuité. Par exemple si $I = [a, b[$ alors $J = \left[f(a), \lim_b f \right[$ (cas f croissante) ou $J = \left] \lim_b f, f(a) \right]$ (cas f décroissante)
par exemple la fonction carré réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur $\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}_+$

Exemples : montrons que

1. l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution α dans \mathbb{R}_+ , et que $1 \leq \alpha \leq 2$

On pose $f(x) = x^3 + x$, alors f est strictement croissante sur \mathbb{R} ($f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$).
donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

donc l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur \mathbb{R}
de plus $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$ donc $\exists \alpha \in [1, 2], f(\alpha) = 3$
donc cette unique solution est $\alpha \in [1, 2]$

2. l'équation $e^x + 3x = 2$ admet une unique solution α dans \mathbb{R}_+^*

De même, on pose $f(x) = e^x + 3x$, alors f est strictement croissante sur \mathbb{R} ($f'(x) = e^x + 3 > 0$).
donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$
de plus $f(0) = 1$ donc cette unique solution α appartient à $]0, +\infty[$

8.4 Bijection réciproque

Propriété de la réciproque : soit f une fonction continue et strictement monotone sur I , alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue et monotone, de même monotonie, sur J

Exemple : soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} + x^2 + 1$, alors

1. f induit une bijection g de $I =]-\infty, 0]$ sur l'intervalle $J = [2, +\infty[$

en effet $f'(x) = -2e^{-2x} + 2x$, donc $\forall x < 0, f'(x) < 0$

donc en appelant g la fonction définie sur $I =]-\infty, 0]$ par $g(x) = f(x)$

g est bijective (strictement décroissante) de I dans $\left[g(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right[= [2, +\infty[$

2. de plus g^{-1} est continue de $[2, +\infty[$ sur $] -\infty, 0]$ et g est strictement décroissante.