**Objectifs d'apprentissage**

A la fin de ce chapitre, je sais :

- calculer une limite de fonction en utilisant :
  - ▷ les fonctions de référence ; ☐
  - ▷ les opérations sur les limites ; ☐
  - ▷ la composition de fonctions ; ☐
  - ▷ les croissances comparées ; ☐
  - ▷ les encadrements ; ☐
  - ▷ les variations : théorèmes de la limite monotone. ☐
- calculer la limite d'une suite de type $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, connaissant les limites de $f$ et de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ☐
- définir et justifier la continuité d'une fonction. ☐
- compléter les études de fonctions continues en utilisant les théorèmes généraux : théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection. ☐
- compléter les représentations graphiques de fonctions à l'aide des nouveaux outils ☐

Les limites de suites nous donnent un cadre pour les limites de fonction dès lors que $x$ tend vers $+\infty$ et nous disposerons des résultats analogues : limites de référence, opérations sur les limites, théorèmes d'encadrement (gendarmes), de croissances comparées, de la limite monotone...

Mais l'objectif de ce chapitre est également de parler des limites de fonctions en un point, par exemple comment définir $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ?

Ci-dessous et sauf exception, on s'intéresse à une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$

# 1 Limites, définitions

## 1.1 Limites en $+\infty$ ou $-\infty$

### 1.1.1 Limites finies

| | |
|---|---|
| Définition : soit $\ell\in\mathbb{R}$, on dit que $f$ **tend vers** $\ell$ quand $x$ tend vers $+\infty$ si $$\forall\varepsilon>0,\exists A\in\mathbb{R},\text{ tel que }\forall x\geqslant A,\lvert f(x)-\ell\rvert\leqslant\varepsilon$$ on notera alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{+\infty}f=\ell$ <br> Par analogie, on peut alors définir la limite en $-\infty$ (en changeant juste $\forall x\geqslant A$ en $\forall x\leqslant A$) | Exemples : |

Remarques :

- comme pour les suites, ces définitions cherchent à traduire que « l'écart entre $f$ et $\ell$ peut être aussi petit que souhaité à partir d'une certaine valeur de $x$ » ;
- $\lvert f(x)-\ell\rvert\leqslant\varepsilon \iff \ell-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant\ell+\varepsilon$
- on ne dira pas « $f$ converge vers ... » mais on utilise parfois d'autres formulations telles que : « $f$ admet $\ell$ pour limite en $+\infty$ ».

### 1.1.2 Limites infinies

| | |
|---|---|
| Définitions : on dit que $f$ **tend vers** $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) quand $x$ **tend vers** $+\infty$ si <br> $\forall M>0,\exists A\in\mathbb{R},\forall x\geqslant A, f(x)\geqslant M$ (resp. $\forall M<0\ldots\forall f(x)\leqslant M\ldots$) <br> on notera alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$ (resp. $\cdots=-\infty$) <br> on définit de même les limites quand $x$ tend vers $-\infty$ | Exemples : |

## 1.2 Limite en un point

On s'intéresse maintenant à la notion de limite en un point, c'est-à-dire quand $x$ se rapproche d'un réel $x_0$, où $x_0$ est un élément de $I$ ou une extrémité de $I$ (par exemple 1 est une extrémité de l'intervalle $[0;1[$).

### 1.2.1 Limite infinie en un point

| | |
|---|---|
| Définitions : on dit que $f$ **tend vers** $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) quand $x$ **tend vers** $x_0$ si $$\forall M>0, \exists \alpha>0, \forall x\in I\cap[x_0-\alpha,x_0+\alpha],\quad f(x)\geqslant M$$ $$\text{(resp. } \forall M<0\dots f(x)\leqslant M)$$ on notera alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f=+\infty$ (resp. $\dots=-\infty$) | Exemples : |

Remarques :
- la définition traduit la notion « $f(x)$ devient infiniment grand quand $x$ se rapproche de $x_0$ » ;
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

### 1.2.2 Limite finie en un point

Dans ce paragraphe, $\ell$ désigne un nombre réel ($x_0$ un élément ou une extrémité de $I$).

| | |
|---|---|
| Définition : on dit que $f$ **tend vers** $\ell$ quand $x$ **tend vers** $x_0$ si $$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in I\cap[x_0-\alpha,x_0+\alpha],\quad |f(x)-\ell|\leqslant\varepsilon$$ on notera alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f=\ell$ | Exemples : |

Remarque : là aussi, on retrouve « $f(x)$ se rapproche indéfiniment de $\ell$ quand $x$ se rapproche de $x_0$ ».

### 1.2.3 Limite à droite, à gauche

Toutes les définitions précédentes concernant les limites en un point peuvent être restreintes « à droite » ou « à gauche », en remplaçant $I\cap[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ par :

| | |
|---|---|
| • $I\cap]x_0,x_0+\alpha]$ pour une **limite à droite**, on note alors $$\lim_{a^+} f \quad\text{ou}\quad \lim_{x\to a^+} f(x) \quad\text{ou}\quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$ • $I\cap[x_0-\alpha,x_0[$ pour une **limite à gauche**, on note alors $$\lim_{a^-} f \quad\text{ou}\quad \lim_{x\to a^-} f(x) \quad\text{ou}\quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$ | Exemples : on peut alors parler de |

### 1.2.4 Extension à une fonction définie sur $I\setminus\{x_0\}$

Les définitions précédentes nous restreignent à des fonctions définies sur un intervalle mais on peut les étendre, par exemple les définitions des limites en point dans le cas où $f(x_0)$ n'est pas défini, avec $x_0\in I$. Pour cela, on exclut $x_0$ dans la définition : $\forall x\in I\cap([x_0-\alpha,x_0[\cup]x_0,x_0+\alpha[)$, et on note alors $\lim\limits_{\substack{a\\ x\neq a}} f$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$. Par exemple : cela nous autorise à définir

> Propriété : soit $f$ une fonction définie sur un ensemble du type $(\cdot,x_0[\cup]x_0,\cdot)$, alors
> - $\lim\limits_a f=\ell$ si et seulement si $\lim\limits_{a^+} f=\ell$ et $\lim\limits_{a^-} f=\ell$
> - $\lim\limits_a f=+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{a^+} f=+\infty$ et $\lim\limits_{a^-} f=+\infty$
> - $\lim\limits_a f=-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{a^+} f=-\infty$ et $\lim\limits_{a^-} f=-\infty$

Exemples :

1. Soit $f$ : $\begin{array}{rl} & \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 2x+1 & \text{si} \quad x > 0 \\ x^2+x+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{array} \right. \end{array}$

   alors, $\lim\limits_{0^+} f =$ et $\lim\limits_{0^-} f =$
   $f$ n'est pas définie en 0
   mais

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

3. soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

   alors si $x \in ]-\infty, 0[, f(x) =$ et donc . De même

   donc

### 1.3 Unicité de la limite

Théorème : si une fonction admet une limite finie, en un point ou en $+$ ou $-\infty$, alors sa limite est unique.

Remarque : cette propriété est valable pour toutes les limites finies définies précédemment, y compris limite à droite et limite à gauche. Attention, dans le cas où elles existent, cela ne veut pas dire pour autant que les limites à droite et à gauche sont les mêmes (cf. exemple **3** ci-dessus).

On ne parle pas d'unicité pour les limites infinies mais une fonction ne peut pas non plus avoir deux limites infinies « différentes ».

## 2 Limites de référence

### 2.1 Fonctions puissances

Propriétés sur les fonctions puissances entières : soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- si $n$ est **pair** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- si $n$ est **impair** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

Propriétés sur les fonctions puissances quelconques (dont la racine carrée) : soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{array} \right. \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{array} \right.$$

en particulier $(\alpha = \dfrac{1}{2})$ : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Remarque : les puissances quelconques contiennent aussi les puissances entières.

### 2.2 Logarithme népérien et exponentielle

Propriétés : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

## 3 Opérations sur les limites

Toutes les opérations vues sur les suites restent valables pour les fonctions. La nouveauté vient du fait qu'il existe des limites en un point ou en $+$ ou $-\infty$
En particulier, les résultats sont valables lorsqu'il s'agit de limites à droite ou à gauche.

### 3.1 Somme, produit par un nombre réel

| $\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell$ | | | |
| $+\infty$ | | | |
| $-\infty$ | | | |

Avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ :

| $\lim f(x)$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim \lambda f(x)$, avec $\lambda > 0$ | | | |
| $\lim \lambda f(x)$, avec $\lambda < 0$ | | | |

Remarque :
il y a un type de forme indéterminée pour l'addition

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 7x) =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x + 15) =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (3e^x + 5) =$

### 3.2 Produit

| $\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$ | $\ell' \neq 0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell \neq 0$ | | | | |
| $0$ | | | | |
| $+\infty$ | | | | |
| $-\infty$ | | | | |

$\infty$ signifie que la limite dépend du signe de $\ell$

Remarque : il y a un type de forme indéterminée pour le produit

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(2 - x) =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\dfrac{1}{x} - 3\right) =$

### 3.3 Inverse et quotient

Dans cette section, on ne peut pas déterminer les limites du type « $\dfrac{*}{0}$ » si on ne connait pas le signe du dénominateur.
On se limitera donc au cas où le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif (que l'on note ici $0^+$) ou strictement négatif (noté ici $0^-$).

| $\lim f(x)$ | $\ell \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim \dfrac{1}{f(x)}$ | | | | | |

Exemples : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} =$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2} =$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1} =$

Le tableau suivant donne $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ :

| $\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$ | $\ell' \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell \neq 0$ | | | | | |
| $0$ | | | | | |
| $+\infty$ | | | | | |
| $-\infty$ | | | | | |

Remarque : il y a deux types de formes indéterminées pour le quotient

Exemples : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(x) + x} =$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to -7 \\ x > -7}} \dfrac{x+3}{x+7} =$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x+2}{(x-2)(x+5)} =$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4} =$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 4} =$

## 4 Limite d'une composée d'applications

| | |
|---|---|
| Propriété : <br>soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction définie sur $I$, $g$ une fonction définie sur $J$, telles que $f\langle I\rangle \subset J$ <br>Soit $x_0$ un élément de $I$ ou une extrémité de $I$ (ici $x_0$ peut être un nombre, ou $+\infty$, ou $-\infty$). <br>$$\text{si } \lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to X_0} g(X) = L$$ $$\text{alors } \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$$ Ce résultat est valable pour $X_0$ et $L$ étant des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$ | Exemple : avec $a > 0$ et $a \neq 1$, <br>$\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x\ln(a)}$ et donc <br>$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} & \text{si } \; 0 < a < 1 \\ & \text{si } \quad a > 1 \end{cases}$$ $$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} & \text{si } \; 0 < a < 1 \\ & \text{si } \quad a > 1 \end{cases}$$ En effet (dans le cas n°1), |

Exemples :

1. $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} + 5\right)^9 =$ car
2. $\lim_{x\to 0^-} x\exp\left(\frac{1}{x}\right) =$ car
3. $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x+3} =$ car
4. $\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$ car
5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + 25} =$ car

### Composition par une suite

Nous l'avons déjà entrevu à travers des exercices, si par exemple $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) alors on souhaite pouvoir écrire $\lim_{n\to\infty} e^{u_n} = e^{\ell}$. C'est ce que permet la propriété suivante :

| | |
|---|---|
| Propriété : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous des éléments de $I$ (donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n)$ est défini) : <br>$$\text{si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{et si} \lim_{x\to\ell} f(x) = L \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$$ $\ell$ est donc un élément ou une extrémité de $I$ <br>(donc $\ell$ peut être un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$), <br>et de même $L$ peut être un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$ | Exemples : <br>$\lim_{n\to+\infty} \exp(3^n) =$ <br>$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{2^n}} =$ |

## 5 Croissances comparées, gestion des formes indéterminées

### 5.1 Propriétés de croissances comparées

| | |
|---|---|
| a) **Puissances et logarithme** : avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ <br>$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^\beta(\ln x)^\alpha = 0$ $\quad$ ($\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$) <br>b) **Puissances et exponentielle** :avec $a > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, <br>$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et avec } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^{ax} = 0$$ c) **Logarithme et exponentielle** : avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{(\ln x)^\alpha} = +\infty$ | Exemples : <br>$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{x^2-1} =$ <br>$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) =$ <br>$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\sqrt{x}} =$ <br>$\lim_{x\to 0^+} x^x =$ |

Remarque : on résume en disant que « les puissances l'emportent sur le logarithme » et que « l'exponentielle l'emporte sur les puissances » (et de fait « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme »).

### 5.2 Transformation d'expressions pour lever une forme indéterminée

Comme pour les suites, on utilisera notamment la « factorisation par le plus gros », mais aussi l'expression conjuguée (pour la différence entre des racines).

#### Cas particulier des fonctions polynomiales, ou des fonctions rationnelles

Voici un résultat non officiel, mais qu'il est bon d'avoir en tête, tout en sachant le démontrer (une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynomiales).

> Propriétés : pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$ :
> - la limite d'une fonction polynomiale est égale à la limite du terme de plus haut degré.
> - la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Démonstration avec des exemples :

**1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 + 5x - 9) = \qquad = \qquad$ car

**2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 3x + 4}{2x + 3} = \qquad = \qquad = \qquad$ car

**3.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^6 + x^3 + 1} = \qquad = \qquad = \quad$ car

Pour une limite en $a$ avec $a$ un nombre réel, on commence par simplifier la fraction rationnelle. Si la limite d'une expression polynomiale vaut 0 en un point, c'est que ce point est une racine.

Exemples :

**1.** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \qquad$ car

**2.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \qquad$ car

### Autres exemples

**1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}) =$

**2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x - x\ln(x)\big) =$

**3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(xe^x - x\big) =$

**4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} =$

**5.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(xe^{2x} - 3e^x\big) =$

**6.** $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} =$

# 6 Limites et inégalités

Dans cette section, $x_0$ désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

## 6.1 Passage à la limite dans une inégalité

| | |
|---|---|
| Propriété : $f$ et $g$ sont deux fonctions avec $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ ($\ell$ et $\ell'$, des réels)<br>$$\text{si } \forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x) \text{ alors } \ell \leqslant \ell'$$<br>en particulier,<br>Propriété : si $f$ est une fonction positive (i.e. $\forall x \in I, f(x) \geqslant 0$)<br>$$\text{alors } \ell \geqslant 0 \qquad (\ell = \lim_{x\to x_0} f(x))$$ | Exemple :<br>avec $f(x) = \exp(g(x))$ où $g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ |

⚠ Les inégalités concernant les limites sont toujours **larges**.

En effet, comme pour les suites, quand bien même on a $\forall x \in I, f(x) > 0$, on ne peut pas pour autant en déduire $\ell > 0$
Pour s'en convaincre :
Autre exemple : soit $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
on a bien, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) < g(x)$

## 6.2 Théorème des gendarmes

Propriétés : soit $f, g, h$ trois fonctions telles que : $\forall x \in I, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

$$\text{si } \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \quad \text{et } \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Exemple : soit $s$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant s(x) \leqslant 1$
Soit $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{3 - s(x)}{x - 3}$, déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

## 6.3 Théorème de comparaison (ou gendarmes version infinie)

| | |
|---|---|
| Propriétés : soit $f$ et $g$ deux fonctions telles que :<br>$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x)$$<br>1) si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$<br>2) si $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ | Exemples :<br>$\lim_{x\to-\infty} \lfloor x \rfloor =$ car<br>$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor =$ car |

## 6.4 Théorème de la limite monotone

De même que pour les suites, une fonction monotone admettra forcément une limite (finie ou infinie) aux bornes de chaque intervalle de définition.
Il s'agit donc des deux bornes : par exemple en 0 et en $+\infty$ si la fonction est définie sur $]0; +\infty[$ ; ou même en $-\infty$, en $0^-$, en $0^+$ et en $+\infty$ si elle est définie sur $\mathbb{R}^*$

Théorème de la limite monotone : soit $f$ une fonction monotone sur $I = ]a, b[$
où $a$ et $b$ peuvent être des nombres réels ou $-\infty$ ou $+\infty$

1) si $x_0 \in I$, alors $f$ admet une limite finie à gauche et à droite en $x_0$

2) si $x_0 = a$

**a.** si $f$ est croissante alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est minorée (limite finie)} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

**b.** si $f$ est décroissante alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est majorée (limite finie)} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

3) si $x_0 = b$

**a.** si $f$ est croissante alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est majorée (limite finie)} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

**b.** si $f$ est décroissante alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \text{si } f \text{ est minorée (limite finie)} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple : montrer que la fonction définie par $f(x) = x\ln(x)$ admet une limite finie en 0

Remarque : attention le premier point ne signifie pas qu'une fonction monotone admet une limite en tout point.
Par exemple, la fonction partie entière est mais $\lim\limits_{x \to 2^-} \lfloor x \rfloor =$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \lfloor x \rfloor =$

# 7 Continuité

## 7.1 Continuité en un point

Définition : soit $I$ est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ un nombre appartenant à l'intervalle $I$, et $f$ une fonction définie sur $I$.

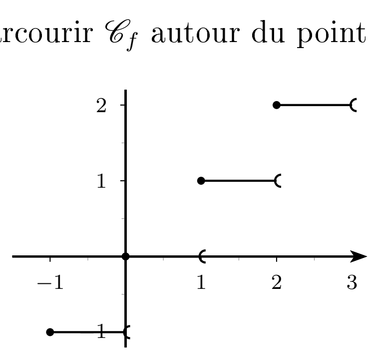
1) on dit que $f$ est **continue en** $a$ lorsque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) (si $I \neq \ldots, a]$), on dit que $f$ est **continue à droite en** $a$ si : $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$

3) (si $I \neq [a, \ldots)$, on dit que $f$ est **continue à gauche en** $a$ si : $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$

Remarque : cette définition cherche à traduire « (localement) on peut parcourir $\mathscr{C}_f$ autour du point $(a, f(a))$ sans lever le crayon »

Exemple : la fonction partie entière est l'exemple typique de fonction discontinue. En effet, on ne peut pas définir $\lim\limits_{x \to 2} \lfloor x \rfloor$ ;
et encore moins dire $\lim\limits_{x \to 2} \lfloor x \rfloor =$
En particulier $\lim\limits_{x \to 2^-} \lfloor x \rfloor =$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \lfloor x \rfloor =$
on peut donc seulement dire que $\lfloor . \rfloor$ est




| | |
|---|---|
| Propriété : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application, et $a \in I$ ($f$ est donc définie en $a$), avec $a$ qui n'est pas une extrémité de $I$, alors :<br><br>$f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est continue à droite en $a$ et à gauche en $a$ | Exemple : soit $f : \; x \; \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$<br>$f$ est , en effet<br>mais $f$<br>car |

Exemple : « rendre une fonction continue »

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

Pour quelle(s) valeur(s) de $k$, $f$ est-elle continue en $0$ ?

### 7.2 Continuité sur un intervalle

Définition : $I$ est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application,
on dit que $f$ **est continue sur** $I$ si $f$ est continue en tout point $a$ de $I$,
on note $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble des applications continues de $I$ dans $\mathbb{R}$

Remarques :

- $f \in \mathscr{C}(I)$ ou $f \in \mathscr{C}^0(I)$ signifie que $f$ est continue sur $I$
- $f$ est continue sur un intervalle $I$ signifie concrètement que l'on peut tracer $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon.
- on peut définir la continuité plus généralement, avec $\mathscr{D}$ qui n'est pas un intervalle (par exemple une réunion d'intervalles) : on dit que $f$ est continue sur $\mathscr{D}$ lorsque $f$ est continue en tout $a$ de $\mathscr{D}$
  Par exemple, $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle).

Exemples :

**1.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ alors $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $a \in \mathbb{R}$, quelconque, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$

**2.** $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$, et en $0$

Propriété : les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynômes), valeur absolue, racine carrée, exponentielle, logarithme népérien, puissances, sont continues sur leur domaine de définition.

Exemples : grâce à cette propriété, on peut affirmer

$\lim\limits_{x \to a} e^x =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} =$ (si $a \geqslant 0$) $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a} \ln(x) =$ (lorsque $a > 0$) $\qquad$ etc...

### 7.3 Opérations sur les applications continues

Propriétés : soit $a$ un élément de $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

**1.** si $f$ et $g$ sont continues en $a$,
alors $\lambda f$, $f + g$ et $fg$ sont continues en $a$
si de plus $g(a) \neq 0$,
alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en $a$

**2.** si $f$ et $g$ sont continues sur $I$,
alors $\lambda f$, $f + g$ et $fg$ sont continues sur $I$.
si de plus $g$ ne s'annule pas,
alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur $I$

Propriétés - composition :
si $f$ et $g$ sont continues et si $g \circ f$ est définie, alors $g \circ f$ est continue

Exemple : soit $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, alors $g$ est continue sur $]-1, +\infty[$ car

Exemples pour la composition :

soit $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ alors

soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$
alors

### 7.4 Continuité et suites

| | |
|---|---|
| Propriété : soit $a \in I$. Si $f$ est continue en $a$, alors : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans $I$ qui converge vers $a$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ | Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{1/n} =$ <br> $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+2)-\ln(n+1) =$ |

Remarque : si une suite est définie par $u_0$ puis de manière récursive par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ continue, alors la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers une limite $\ell$) entraine la convergence de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(\ell)$ et on retrouve $f(\ell) = \ell$

# 8 Théorèmes généraux

## 8.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors pour tout nombre $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $k = f(c)$

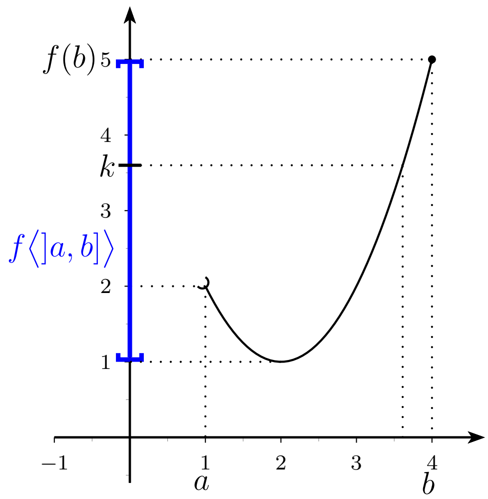
Remarque : autrement dit, si $f$ est continue, on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon et on passe donc par toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. toutes les « valeurs intermédiaires »).

Exemples :

1. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
   alors l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-1, 0]$ et dans $[2, 3]$
   en effet,
2. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$
   alors $e$ admet un antécédent par $f$, compris entre $-1$ et $0$
   en effet,

Pour la suite, on rappelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ « en un seul morceau » (qui « n'a pas de trou »).

Théorème des valeurs intermédiaires (bis) :
l'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle
(i.e. si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f\langle I\rangle$ est un intervalle).




Ces deux théorèmes sont équivalents (d'où l'homonymie).

Remarque : autrement dit, si $f$ est continue, et si l'ensemble de départ « n'a pas de trou », alors l'image directe de l'ensemble de départ « n'a pas de trou ».

Exemples où le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas :
- si $f$ n'est pas continue : l'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction $\lfloor . \rfloor$ est
- si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle : l'image de $[-1; 0[\cup]0; 1]$ par la fonction inverse est

Remarques :
- l'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle, mais pas nécessairement de même nature (par exemple l'image de $\mathbb{R}_-$ par exp est ).
- grâce au TVI, on peut lire l'intervalle $f\langle [a, b]\rangle$ dans le tableau de variations (ou sur un graphique).

Exemple d'application : soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $f'(x) =$

donc $f$ est , de plus $\lim\limits_{-\infty} f =$

c'est en fait la continuité et le TVI qui permettent de déterminer réellement les images directes, toutes les valeurs intermédiaires étant atteintes (le tableau de variations et le graphique l'illustrent bien) :

**1.** $f\langle[0,2]\rangle =$

**2.** $f\langle[-1,1]\rangle =$

**3.** $f\langle]-1,+\infty[\rangle =$

> Propriété - corollaire du TVI : soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$
> si $f$ est continue sur $[a,b]$, et si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec $k =$

Remarque - corollaire du corollaire par contraposée du corollaire

si $I$ est un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue qui ne s'annule pas sur $I$, alors $f$ garde un signe constant sur $I$

Exemples :

**1.** soit $f(x) = e^{-x} - 2x$, alors

**2.** l'équation $\ln(x) + 1 = -2x$ admet au moins une solution dans $\left[\dfrac{1}{e^3}, \dfrac{1}{e}\right]$

en effet,

### 8.2 Image d'un segment par une application continue

Comme nous l'avons vu, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, mais pas forcément de même nature. Mais lorsque l'intervalle est un segment, i.e. $I = [a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors son image par une fonction continue est aussi un segment.

> Théorème des bornes :
> si $f$ est continue sur un segment $[a,b]$, alors $f$ est **bornée et atteint ses bornes**, autrement dit, elle admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$

Remarques :

- autrement dit, si $f$ est continue $f\langle[a,b]\rangle = \left[\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]} f\right]$, on note aussi $\left[\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right]$
- incidemment, **l'image directe d'un segment par une fonction continue est un segment**
- plus précisément, si $f$ est une fonction continue
  - ▷ si $f$ est croissante sur $[a,b]$, alors $f\big\langle[a,b]\big\rangle = [f(a), f(b)]$
  - ▷ si $f$ est décroissante sur $[a,b]$, alors $f\big\langle[a,b]\big\rangle = [f(b), f(a)]$

Contre-exemple avec une fonction non continue :

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

$f$ n'est pas continue en 0

$f\big\langle[0,1]\big\rangle =$

$f$ admet un

mais

### 8.3 Continuité et monotonie

$I$ désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème de la bijection : soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $I$ alors
$f$ est une bijection de $I$ dans $J$, où $J = f\langle I \rangle$
et $J$ est un intervalle dont les extrémités sont les limites de $f$ aux extrémités de $I$

Démonstration : $f$ est injective car elle est strictement monotone et surjective de $I$ sur $f\langle I \rangle$ par définition de $f\langle I \rangle$
de plus, d'après le TVI, $J = f\langle I \rangle$ est un intervalle (car $f$ est continue)
d'après le théorème de la limite monotone, $f$ admet des limites aux extrémités de $I$ et la monotonie de $f$ entraine que les extrémités de $J$ sont les limites de $f$ aux extrémités de $I$

Remarque :

1. comme le suggère la démonstration, la continuité n'est pas nécessaire pour réaliser une bijection de $I$ sur $f\langle I \rangle$ (la stricte monotonie suffit). La continuité permet d'affirmer que $f\langle I \rangle$ est un intervalle.
2. si $I$ est en partie fermé, alors la limite devient la valeur de $f$ au point donné par continuité. Par exemple si $I = [a, b[$ alors $J = \left[f(a), \lim_b f\right[$ (cas $f$ croissante) ou $J = \left]\lim_b f, f(a)\right]$ (cas $f$ décroissante)
   par exemple la fonction carré

Exemples : montrons que

1. l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$, et que $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$
2. l'équation $e^x + 3x = 2$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+^*$

### 8.4 Bijection réciproque

Propriété de la réciproque : soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $I$, alors sa bijection réciproque $f^{-1}$ est continue et monotone, de même monotonie, sur $J$

Exemple : soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} + x^2 + 1$, alors

1. $f$ induit une bijection $g$ de $I = ]-\infty, 0]$ sur l'intervalle $J =$
2. de plus $g^{-1}$ est