Eléments de corrigé

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$. Que vaut u_7 ?

$u_7 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{9}{8\times 9} - \dfrac{8}{9\times 8} = \dfrac{1}{72}$

2. (u_n) désigne une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 2$, que vaut u_{10} ?

$u_{10} = u_0 + 10\times 4 = 42$

3. (u_n) désigne une suite arithmétique. Sachant que $u_1 = 11$ et $u_7 = -13$, que vaut la raison ?

$u_7 = u_1 + 6\times r$ donc $-13 = 11 + 6\times r$ donc $r = \dfrac{-24}{6} = -4$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 + 7n + 12$, quel est le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

☒ croissante ☐ décroissante ☐ non monotone

Nous avons le choix $u_{n+1} - u_n = 2n + 8$ où l'étude de fonction avec $f(x) = x^2 + 7x + 12$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (sa dérivée vaut $f'(x) = 2x + 7$).

5. Sachant que $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$, quel est le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

☐ croissante ☒ décroissante ☐ non monotone

Le rapport est intéressant ici : $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{n+1}{n+2}\right) \leqslant u_n$ ($\forall n, u_n \geqslant 0$ et $0 \leqslant 1 - \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant 1$).

6. Quelle peut être la nature de la suite dont les premiers termes sont : $1; 4; 9; 16; 25; 36; 49$?

☐ arithmétique ☐ géométrique
☒ ni arithmétique, ni géométrique ☐ arithmétique et géométrique

On le voit avec les trois premiers termes : ni arithmétique ($+3$ puis $+5$), ni géométrique ($\times 4$ puis $\times 1,25$).

7. Une suite géométrique peut être décroissante.

☒ vrai ☐ faux

Avec une raison comprise entre 0 et 1 (strictement), par exemple $0,1$.

8. Soit f une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$. Alors si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$?

☐ vrai ☒ faux

C'est l'autre implication qui est vraie. Voici un contre-exemple : $f(x) = |x\cos(2\pi x)|$. Vous pouvez la représenter sur Geogebra, c'est très amusant.

9. Un organisme doit gérer une forêt qui comporte 3 000 arbres à la fin du printemps 2018. Chaque année, des arbres meurent naturellement ou sont coupés pour leur bois. Le nombre d'arbres dans la forêt diminue alors de 5 %. Pour tenter de compenser cette perte, l'organisme replante 80 arbres tous les printemps.
Si on appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite, quelle formule peut décrire cette évolution ?

☐ $u_{n+1} = 0,95^n \times 3000 - n\times 80$ ☐ $u_{n+1} = 1,05\times(3000 - n\times 80)$
☐ $u_{n+1} = 1,05u_n - 80$ ☒ $u_{n+1} = 0,95u_n + 80$

10. Avec la même évolution, combien d'arbres comptera la forêt en 2021 ? (on arrondira à l'unité)

On calcule (avec la calculatrice), les termes de proche en proche (2021 correspond à u_3) :
$u_1 = 0,95u_0 + 80 = 2\,930$ $u_2 = 0,95u_1 + 80 = 2\,863,5$ $u_3 = 0,95u_2 + 80 = 2\,800,325 \approx 2\,800$