

Eléments de corrigé

1. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x}$? donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$

Pour bien faire les choses, on parle de composition de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$

2. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{8x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$? Par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{8x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$

En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{8x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

3. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^8}{x^2 + x^9 - 5}$? $\frac{3x^8}{x^2 + x^9 - 5} = \frac{3x^8}{x^9 \left(1 + \frac{1}{x^7} - \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3}{x} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^7} - \frac{5}{x^9}\right)}$
 or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x^9} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^8}{x^2 + x^9 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^8}{x^9} = 0$ par opérations sur les limites.

4. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 2x + 1}$?
Exercice 1.13

De même en factorisant par les termes dominants, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

5. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 2}$? par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 2} = +\infty$
Exercice 1.15 en effet, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x^2 + 2x + 1 = 17$

6. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^7}{1 + \frac{1}{\ln(x)}}$? $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^7}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = +\infty$ par opérations sur les limites
 en effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ (par opération) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x))^7 = +\infty$

7. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{(\ln(x))^{10}}}$? $\frac{x^2}{\frac{1}{(\ln(x))^{10}}} = x^2 (\ln(x))^{10}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{(\ln(x))^{10}}} = +\infty$

8. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{\ln(x)}$?

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, donc comme le 0 est au dénominateur il faut déterminer le signe du dénominateur pour pouvoir appliquer les opérations sur les limites, mais ici $\ln(x)$ change de signe en 1, donc on ne peut pas déterminer la limite. Plus précisément la limite n'existe pas puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\ln(x)} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$

9. Que vaut $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{8 - x}}$?

Par composition de la fonction racine et de termes qui tendent vers $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{8 - x} = +\infty$, donc par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{8 - x}} = 0$

10. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x)^3$?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^3 = -\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x)^3 = -\infty$