ECG 1 - Maths appli. | **Devoir en temps libre n°8** | Pour le 10 mars 2025

Devoir à faire en binôme, obligatoirement ! Et objectif qualité toujours !

Exercice 1 - continuité

Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

1. f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

2. g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Exercice 2

Partie A - étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$

2. Dresser le tableau de variations de g

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ possède deux solutions, notées α et β, avec $\alpha < \beta$

4. Vérifier que $-2 < \alpha < -1$ et que $\beta = 0$

5. A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$

6. Avec Python,

  a. définir la fonction g, puis la représenter graphiquement sur un intervalle de votre choix ;

  b. écrire un programme qui détermine une valeur approchée de α avec une précision de 10^{-4}

Partie B - étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)e^x$ et en déduire le tableau de variations de f

4. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ (avec α défini plus haut).

5. Justifier que $0 < f(\alpha) < \dfrac{1}{4}$ (on pourra étudier $x \mapsto x^2 + 2x$)

6. Donner l'allure de la courbe représentative de f