Code de partage avec Capytale : 0058-1395988

Limites

Exercice 1

On considère la fonction f, de domaine de définition $\mathscr{D}_f$, définie par :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$
2. On considère g, définie seulement sur $]0, 1[$, par : $g(x) = f(x)$
   Calculer la limite de g en 0 et la limite de g en 1
3. Peut-on parler d'une limite de f en 1 ? Que vaut $\lim\limits_{x \to 1^+} f$? $\lim\limits_{x \to +\infty} f$?
4. Grâce à Python, vérifier graphiquement les résultats trouvés (bien choisir les arguments dans la commande `linspace`).

Exercice 2

On considère la fonction f, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$
2. Que peut-on dire de la limite de f en 0 ?
3. Grâce à Python, vérifier graphiquement le résultat trouvé au 1, et conjecturer la valeur de la limite de f en 0
4. Montrer qu'il existe $x \in]0, 2[$, tel que $f(x) = 2$
5. En utilisant un algorithme dichotomique, trouver une valeur approchée de cette solution à 10^{-5} près. Combien de calculs par l'ordinateur a nécessité votre algorithme ?

Exercice 3

On considère la fonction f, définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x + 1}$$

1. Que vaut $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$?
2. Que vaut $f(1)$?
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ grâce au théorème d'encadrement.
4. Grâce à Python, vérifier graphiquement les résultats trouvés. (On tracera deux courbes, d'abord en prenant des abscisses comprises entre 0 et 2,5, puis en prenant des abscisses comprises entre 10 et 20).

Continuité

Exercice 4

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 2 ?
2. Définir la fonction f sous Python.
3. Grâce à Python, vérifier graphiquement le résultat trouvé.

Exercice 5

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. Définir la fonction f sous Python.
3. Grâce à Python, vérifier graphiquement le résultat trouvé.

Exercice 6

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^{1/x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. Définir la fonction f sous Python.
3. Grâce à Python, vérifier graphiquement le résultat trouvé.

Exercice 7

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} & \text{si} \quad x \in [0, 3[\cup]3, +\infty[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 3 ?
2. Définir la fonction f sous Python.
3. Grâce à Python, vérifier graphiquement le résultat trouvé.