Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$
Bon devoir !

Sans calculatrice

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

a) Une fonction continue est bijective

b) Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+e^{\frac{1}{1-x}} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$

c) Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, alors $A^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 2^n & 1\end{pmatrix}$

d) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3-4}{n^2+11}$ est divergente.

e) Sachant que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+1}$ converge.

Exercice 2 - continuité, limites de fonctions et séries

1. La fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}|x-1| & \text{si} \quad x\leqslant -1\\ \dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$ est-elle continue ?

2. Déterminer les limites suivantes

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-x}{e^{2x}+1}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to-3}(x+3)\ln(x+3)$

3. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui calculer leur(s) somme(s)

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^{n-1}}{2\times 5^n}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Exercice 3

1. On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$

On considère l'application $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln(x) \end{array}$

a. Montrer que g est continue.

b. Etudier les variations de g en précisant les limites aux extrémités de son ensemble de définition.

c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ (d'inconnue $x \in]0,+\infty[$), admet une solution et une seule.
On note α l'unique solution de cette équation.

d. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$

e. En utilisant la méthode par dichotomie, écrire un programme avec Python qui permet de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

f. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de g, au point d'abscisse 1

g. Représenter graphiquement $\mathscr{C}_g$
On pourra utiliser les éléments précédents et raisonner sur la prépondérance des termes en 0 et en $+\infty$ pour représenter son allure.

h. Avec Python, écrire un programme qui représente la fonction g sur un intervalle au choix (choix que l'on justifiera).

2. On note $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application $f : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln(x) \end{array}$

a. Montrer que f est strictement croissante sur I

b. En utilisant la question **1.**, étudier le signe de $f(x) - x$ sur I

c. Justifier que $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1) < 1$

d. En déduire que $\forall x \in I, f(x) \in I$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Calculer u_1

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

c. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$

e. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel α

f. Avec Python, écrire un programme qui calcule les 101 premiers termes de la suite et qui les représente graphiquement.

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Calculs matriciels

a. Calculer AU_1 et AU_2

b. Calculer AU_3, respectivement AU_4, et exprimer le résultat en fonction de U_3, respectivement U_3 et U_4

2. **a.** Calculer A^2, A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$

b. En déduire que A n'est pas inversible

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$

b. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n non nul.

Problème 1

Le but de ce problème est de calculer les puissances $n^{\text{ième}}$ d'une certaine matrice et d'appliquer ce calcul à un problème de probabilité

Partie A - étude matricielle

On définit les matrices A, B, P et Q par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{12}A \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel PQ, que peut-on en déduire ?

2. Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$

3. Montrer que $A = PDP^{-1}$

4. Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n

6. Exprimer B^n en fonction de A^n

7. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \times \frac{1}{12^n} \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4^n} \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

Partie II - calculs de probabilités

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

- T : les jouets traditionnels
- M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film ... ;
- S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;

(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

(iii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la science optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$

Au départ, le volume des ventes de ce commerçant se compose d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S

On note :

- T_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie T pour le Noël de l'année n » ;
- M_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie M pour le Noël de l'année n » ;
- S_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie S pour le Noël de l'année n »

On désigne par p_n, q_n et r_n, les probabilités respectives des événements T_n, M_n, S_n

1. Justifier que (T_n, M_n, S_n) forme un système complet d'événements.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$

3. De même exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, q_{n+1}$ et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ (B étant la matrice définie dans la **partie I**).

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$

6. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n, q_n$, et r_n en fonction de n

7. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente ?

8. Avec Python, que font les programmes suivants ?

a. Premier programme :

```python
import numpy.random as rd
def tirage_jouet() :
  a=rd.randint(1,101)
  if a<=45:
    return 1
  elif a>70:
    return 3
  else:
    return 2
```

b. Deuxième programme :

```python
x=tirage_jouet()
n=1
while x<3:
  if x==1:
    x=rd.randint(1,4)
  else :
    r=rd.randint(1,5)
    if r==1:
      x=1
    elif r==2:
      x=2
    else :
      x=3
  n=n+1
print(n)
```