Corrigé *Total sur 71 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *5 points - 1 point par question*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

a) Une fonction continue est bijective

Faux, la fonction carré par exemple est continue (polynomiale) mais pas bijective car $f(-1)=f(1)$

b) Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+e^{\frac{1}{1-x}} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$

C'est vrai, f est continue sur $[0,1]$ et sur $]1,+\infty[$, il faut étudier la continuité en 1 :
d'une part $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\sqrt{1}=1=f(1)$ donc f est continue à gauche
de plus $\lim\limits_{x\to 1^+} 1-x=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1=f(1)$ donc f est continue à droite, donc f est continue en 1, donc f est continue

c) Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$, alors $A^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\2^n&1\end{pmatrix}$ C'est faux, on peut le montrer avec $A^2=\begin{pmatrix}9&0\\8&1\end{pmatrix}$

d) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^3-4}{n^2+11}$ est divergente.

C'est vrai, elle est même grossièrement divergente puisque $\dfrac{n^3-4}{n^2+11}=\dfrac{n^3}{n^2}\times\dfrac{1-\frac{4}{n^3}}{1+\frac{11}{n^2}}=n\times\dfrac{1-\frac{4}{n^3}}{1+\frac{11}{n^2}}$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3-4}{n^2+11}=+\infty$ par opérations car $\lim\limits_{n\to+\infty},\dfrac{4}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{11}{n^2}=0$ et donc $\dfrac{1-\frac{4}{n^3}}{1+\frac{11}{n^2}}\to 1$

e) Sachant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2+1}$ converge.

C'est vrai, car il s'agit de séries à termes positifs, de plus $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge et $\forall n\in\mathbb{N}, n^2\leqslant n^2+1\Rightarrow\dfrac{1}{n^2+1}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ (la fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$), d'où le résultat par théorème de comparaison.

Exercice 2 - continuité, limites de fonctions et séries *8 points*

1. La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ est-elle continue ? *2 points*

f est continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $]1, +\infty[$, respectivement, comme composée de fonctions continues et comme quotient de fonctions continues, il faut donc étudier la continuité en 1 :
d'une part $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = |-1-1| = |-2| = 2 = f(-1)$ par continuité de la fonction valeur absolue, donc f est continue à gauche en 1
de plus $\dfrac{1-x^2}{x+1} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x+1} = 1-x$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1-x^2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} 1-x = 2 = f(-1)$ donc f est continue à droite en 1, donc f est continue en 1, donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}-x}{e^{2x}+1}$ *1,5 points*

On factorise par les termes prépondérants : e^{3x} au numérateur et e^{2x} au dénominateur :
$\dfrac{e^{3x}-x}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^{3x}\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}} \times \dfrac{1-\frac{x}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = e^x \times \dfrac{1-\frac{x}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$
or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{3x}} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$ (limite usuelle) donc, par opérations, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\frac{x}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = +\infty$ on trouve finalement par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}-x}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x \times \dfrac{1-\frac{x}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = +\infty$

b. $\lim\limits_{x \to -3} (x+3)\ln(x+3)$ *1 point*

$\lim\limits_{x \to -3} (x+3) = 0$ et par croissances comparées $\lim\limits_{x \to 0} X\ln(X) = 0$
donc par composition $(X = x+3)$, $\lim\limits_{x \to -3} (x+3)\ln(x+3) = 0$

3. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui calculer leur(s) somme(s)

a. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{3^{n-1}}{2 \times 5^n}$ *2 points*

On va se ramener à une série géométrique, pour cela on passe par les sommes partielles :
pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3^{k-1}}{2 \times 5^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2 \times 3} \times \dfrac{3^k}{5^k} = \dfrac{1}{6} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k$
or $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k - 1$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k$ est une série géométrique convergente (car $|q| = \dfrac{3}{5} < 1$)
de plus $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k = \dfrac{1}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{\frac{2}{5}} = \dfrac{5}{2}$
donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k$ est une série convergente et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k - 1 = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3}{2}$
donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{3^{n-1}}{2 \times 5^n}$ est une série convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{n-1}}{2 \times 5^n} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4}$

b. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *1,5 points*

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$ par propriété du logarithme, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ s'écrit alors $\sum\limits_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n))$ qui est une série télescopique, elle est donc de même nature que la suite $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui est divergente
plus précisément, en étudiant les sommes partielles, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ par télescopage
or $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ diverge vers $+\infty$

Exercice 3 *23 points*

1. On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$ On considère l'application $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+\ln(x) \end{array}$

a. Montrer que g est continue. *0,5 point*

g est continue en tant que somme de fonctions usuelles continues (la fonction carré et la fonction ln).

b. Etudier les variations de g en précisant les limites aux extrémités de son ensemble de définition. *1,5 points*

$\forall x \in]0,+\infty[, g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$, de fait $g'(x) > 0$ (opérations avec des termes strictement positifs) donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
de plus d'après les limites usuelles, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ (par continuité de la fonction carré) donc d'une part par addition $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$
et d'autre part par addition encore $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ (d'inconnue $x \in]0,+\infty[$), admet une solution et une seule. *1 point*
On note α l'unique solution de cette équation.

D'après les questions précédentes, g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to 0} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$ i.e. sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente or $0 \in \mathbb{R}$, donc 0 admet un unique antécédent par la fonction g, i.e. l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

d. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ *1,5 points*

$g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \ln(2) < 0$ d'après l'encadrement de $\ln(2)$ donnée par l'énoncé ($\ln(2) > 0,69 > \dfrac{1}{4}$)
par ailleurs $g(1) = 1^2 + \ln(1) = 1 > 0$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (g est toujours continue), l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et même sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ car $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0$ et $g(1) \neq 0$

or d'après la question précédente, cette équation admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$, donc $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

<u>Option B (la réciproque)</u> : le calcul de $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $g(1)$ permet d'écrire $g\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0 < g(1)$ i.e. $g\left(\dfrac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$
or g est continue, strictement croissante et bijective, donc par propriété, sa réciproque g^{-1} est également continue et strictement croissante. De fait on peut composer l'inégalité par g^{-1} en conservant son sens :

$g^{-1}\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) < g^{-1}(g(\alpha)) < g^{-1}(g(1))$ i.e. $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ car $g^{-1} \circ g = \text{id}$

e. En utilisant la méthode par dichotomie, écrire un programme avec Python qui permet de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près. *2 points*

```python
import numpy as np
a = 1/2
b = 1
while b-a>10**(-3):
  c = (a + b) / 2
  if (c**2 +np.log(c))<0 :
    a=c
  else :
    b=c
print(c, "est une valeur
    approchée de alpha à
    0,0001 près")
```

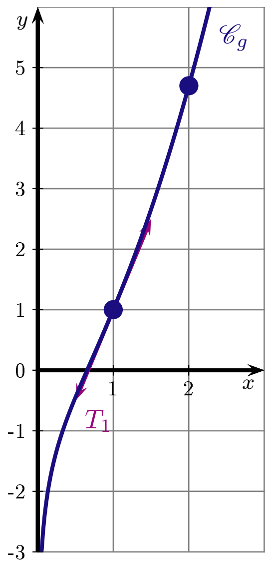
f. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de g, au point d'abscisse 1 *1 point*

L'équation de la tangente est $y = g'(1)(x-1)+g(1) = 3(x-1)+1$ i.e. $y = 3x-2$ car $g'(1) = 2\times 1 + \dfrac{1}{1} = 3$ et $g(1) = 1$

g. Représenter graphiquement $\mathscr{C}_g$ *2 points*

On pourra utiliser les éléments précédents et raisonner sur la prépondérance des termes en 0 et en $+\infty$ pour représenter son allure.

Comme nous l'avons vu plus haut avec les limites, en $0, \ln(x)$ tend vers $-\infty$ alors que x^2 tend vers 0, la courbe de g va donc être semblable à celle de ln quand x tend vers 0
en $+\infty$, les deux termes tendent vers $+\infty$ mais comme x^2 est prépondérant sur $\ln(x)$, la courbe de g va se rapprocher de la courbe de la fonction carré (on peut aussi remarquer que pour $x \geqslant 1, g(x) \geqslant x^2$). Par aileurs, $g(2) = 4 + \ln(2) \simeq 4,7$ d'après l'énoncé
par ailleurs, la tangente dont on a calculé l'équation à la question précédente nous permet d'améliorer la précision du tracé.



h. Avec Python, écrire un programme qui représente la fonction g sur un intervalle au choix (choix que l'on justifiera). *1,5 points*

On commence par définir la fonction g, puis on la représente avec 100 points sur l'intervalle $]0,1;10[$ car g n'est pas définie en 0

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def g(x):
  return x**2+np.log(x)
x=np.linspace(0.1,10,100)
y=g(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

2. On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application $f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x) \end{array}$

a. Montrer que f est strictement croissante sur I *2 points*

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f'(x) = 1 - \frac{1}{4} \times 2x - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x}$

$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $-2x^2 + 4x - 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 4 \times (-2) \times (-1) = 8$

ce trinôme admet donc deux racines : $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2 \times (-2)} = 1 - \frac{\sqrt{4}\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de même $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-2x^2 + 4x - 1$ est donc strictement positif entre les racines ($a = -2 < 0$) i.e sur $]x_1, x_2[$ et donc a fortiori sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, en effet $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$ et de manière évidente $x_2 > 1$

donc $(x > 0)$ $\forall x \in I, \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} > 0$ i.e. $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur I

b. En utilisant question **1.**, étudier le signe de $f(x) - x$ sur I *1 point*

Soit $x \in I$ alors $f(x) - x = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + \ln(x)) = -\frac{1}{4}g(x)$
donc f est de signe opposé à celui de g
or d'après l'étude de g, $g(x)$ est négatif sur $\left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$ et positif sur $[\alpha, 1]$

donc $f(x) - x$ est positif sur $\left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$ et négatif sur $[\alpha, 1]$ (et même strictement si on exclut α des intervalles).

c. Justifier que $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$ *1,5 points*

Par définition de f, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \ln(2)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\ln(2) - \frac{1}{4}\right)$

or d'après l'encadrement de $\ln(2)$ donné par l'énoncé $\ln(2) - \frac{1}{4} > 0$ et donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\ln(2) - \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{2}$ i.e. $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

de plus $f(1) = 1 - \frac{1}{4} \times 1^2 - \frac{1}{4}\ln(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$

de plus f est strictement croissante sur I d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$ donc finalement $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$

Nota bene : on aurait aussi pu utiliser la question précédente (et la stricte croissance) : $f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} > 0$ et $f(1) - 1 < 0$

d. En déduire que $\forall x \in I, f(x) \in I$ *1 point*

f est strictement croissante sur I donc $\forall x \in I, f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

et d'après la question précédente, $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ et $f(1) < 1$ donc $\forall x \in I, \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$, i.e. $f(x) \in I$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Calculer u_1 *0,5 point*

Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(1)$ car $u_0 = 1$ donc $u_1 = \frac{3}{4}$ ($f(1)$ a été calculé plus haut)

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ *1 point*

Du grand classique, par récurrence ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n \in I$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par hypothèse $u_n \in I$ donc d'après **2.d.** $f(u_n) \in I$, i.e. $u_{n+1} \in I$
donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \in I$

c. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *1 point*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3}{4}$ donc $u_1 \leqslant u_0$, i.e. $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par hypothèse $u_{n+1} \leqslant u_n$ avec $u_n \in I$ et $u_{n+1} \in I$, donc $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ car f est croissante sur I
i.e. $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$ *1,5 points*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0 par exemple), donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ
de plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc $\ell \in I$ par passage à la limite dans les inégalités, de plus par propriété $u_{n+1} \to \ell$ et $f(u_n) \to f(\ell)$ car f est continue sur I
or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc par unicité de la limite $f(\ell) = \ell$

e. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel α *1 point*

Soit $x \in I$, d'après la question **2.b.**, $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
or d'après **1.c.** $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ donc $f(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$
comme $f(\ell) = \ell$, on en déduit que $\ell = \alpha$ (c'est la seule possibilité pour ℓ)

f. Avec Python, écrire un programme qui calcule les 101 premiers termes de la suite et qui les représente graphiquement. *1,5 points*

```
import numpy as np
u=[1] #on créée une liste pour pouvoir représenter les termes ensuite
for n in range(1,101) :
  u.append(u[n-1]-1/4*(u[n-1]**2+np.log(u[n-1]))) # on calcule u(n) en fonction du
    précédent et on complète la liste
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(u,'+')
plt.show()
```

Exercice 4 *12 points*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Calculs matriciels

a. Calculer AU_1 et AU_2 *1 point*

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0+1 \\ -1+1+0+0 \\ -1+1+0+0 \\ -1+0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{4,1} \text{ et } AU_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0+0 \\ 0-1+1+0 \\ 0-1+1+0 \\ 0+0+0+0 \end{pmatrix}$$

$AU_2 = 0_{4,1}$ également

b. Calculer AU_3, respectivement AU_4, et exprimer le résultat en fonction de U_3, respectivement U_3 et U_4 *1,5 points*

$$AU_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0+0 \\ 0+1+1+0 \\ 0+1+1+0 \\ 0+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2U_3 \text{ et}$$

$$AU_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0+1 \\ 1+0+0+0 \\ 1+0+0+0 \\ 1+0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_3 + 2U_4$$

2. **a.** Calculer A^2, A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$ *1,5 points*

Calculons : $A^2 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0+1 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 1+0+0+1 \\ 1+1+1+0 & 0+1+1+0 & 0+1+1+0 & 1+0+0+0 \\ 1+1+1+0 & 0+1+1+0 & 0+1+1+0 & 1+0+0+0 \\ 1+0+0+1 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 1+0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

puis $A^3 = A^2 \cdot A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0+2 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 2+0+0+2 \\ 3+2+2+1 & 0+2+2+0 & 0+2+2+0 & 3+0+0+1 \\ 3+2+2+1 & 0+2+2+0 & 0+2+2+0 & 3+0+0+1 \\ 2+0+0+2 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 2+0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } 4A^2 - 4A = 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^3$$

b. En déduire que A n'est pas inversible *1,5 points*

On va le démontrer par l'absurde : supposons que A est inversible
alors on peut utiliser sa matrice inverse A^{-1} : $A^3 = 4A^2 - 4A \Rightarrow A^{-1}A^3 = A^{-1}(4A^2 - 4A)$
i.e. $A^2 = 4A^{-1}A^2 - 4A^{-1}A = 4A - 4I_4 = 4(A - I_4)$ ce qui est faux car

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } 4(A - I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A^2$$

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_nA^2 + b_nA$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$ *1,5 points*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(n) : \exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_nA^2 + b_nA$

Initialisation : $A^1 = A = 0 \times A^2 + 1 \times A$ donc $P(0)$ est vraie avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par définition, $A^{n+1} = AA^n$ donc $A^{n+1} = A(a_nA^2 + b_nA)$ par hypothèse,
soit $A^{n+1} = a_nA \times A^2 + b_nA \times A = a_nA^3 + b_nA^2$
or $A^3 = 4A^2 - 4A$ donc $A^{n+1} = a_n(4A^2 - 4A) + b_nA^2 = (4a_n + b_n)A^2 - 4a_nA = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$
i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité, de plus on a montré au passage que $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$
donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie, i.e. $A^n = a_nA^2 + b_nA$ est décroissante.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ *0,5 point*

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$
donc pour $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$

b. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n *2 points*

D'après la question précédente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrentes linéaire d'ordre 2, on étudie donc l'équation caractéristique $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ qui admet 2 pour seule racine
donc $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lambda 2^n + \mu n2^n$
en particulier $a_1 = 2\lambda + 2\mu$ et $a_2 = 4\lambda + 2 \times 4\mu = 4\lambda + 8\mu$
or, d'après **c.** $a_1 = 0$ car $b_1 = 1$, donc $a_2 = 4a_1 + b_1 = 1$

$$\text{donc } \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 4\lambda + 8\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -4\mu + 8\mu = 1 \text{ par substitution} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 4\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{4} \\ \mu = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = -\frac{1}{4} \times 2^n + \frac{1}{4}n2^n = \frac{1}{4} \times 2^n(n-1) = 2^{n-2}(n-1)$$

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n *1 point*

$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = -4a_n$ donc pour tout $n \geqslant 2$, on a $b_n = -4a_{n-1}$
et donc $b_n = -4(n-1-1)2^{n-1-2} = -(n-2)2^2 \times 2^{n-3} = -(n-2)2^{n-1}$
et on remarque que cette formule est encore valide pour $n = 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -(n-2)2^{n-1}$

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n non nul. *1,5 points*

En faisant le bilan de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*, A^n = a_nA^2 + b_nA$ donc

$$A^n = (n-1)2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-2} \left((n-1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$A^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Problème 1 *24 points*

Le but de ce problème est de calculer les puissances $n^{\text{ième}}$ d'une certaine matrice et d'appliquer ce calcul à un problème de probabilité

Partie A - étude matricielle

On définit les matrices A, B, P et Q par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{12}A \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit matriciel PQ, que peut-on en déduire ? *1,5 points*

Il suffit de calculer : $PQ =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 3\times 2+2\times 8+0 & 3\times 2+2\times(-3)+0 & 3\times 2+2\times(-3)+0 \\ 4\times 2-1\times 8+0 & 4\times 2-1\times(-3)+1\times 11 & 4\times 2-1\times(-3)+1\times(-11) \\ 4\times 2-1\times 8+0 & 4\times 2-1\times(-3)-1\times 11 & 4\times 2-1\times(-3)-1\times(-11) \end{pmatrix}$$

donc $PQ = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 6+16 & 6-6 & 6-6 \\ 8-8 & 8+3+11 & 8+3-11 \\ 8-8 & 8+3-11 & 8+3+11 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

donc P est inversible et $Q = P^{-1}$

2. Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$ *1,5 points*

Calculons (sachant que $P^{-1} = Q$) :

$$P^{-1}A = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2\times 4+2\times 4+2\times 4 & 2\times 3+2\times 3+2\times 6 & 2\times 3+2\times 6+2\times 3 \\ 8\times 4-3\times 4-3\times 4 & 8\times 3-3\times 3-3\times 6 & 8\times 3-3\times 6-3\times 3 \\ 0+11\times 4-11\times 4 & 0+11\times 3-11\times 6 & 0+11\times 6-11\times 3 \end{pmatrix}$$

donc $P^{-1}A = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 8+8+8 & 6+6+12 & 6+12+6 \\ 32-12-12 & 24-9-18 & 24-18-9 \\ 44-44 & 33-66 & 66-33 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 24 & 24 & 24 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & -33 & 33 \end{pmatrix}$

donc $P^{-1}AP =$

$$\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 24 & 24 & 24 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & -33 & 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 24(3+4+4) & 24(2-1-1) & 24(1-1) \\ 8\times 3-3\times 4-3\times 4 & 8\times 2-3\times(-1)-3\times(-1) & 0-3-3\times(-1) \\ 0-33\times 4+33\times 4 & 0-33\times(-1)+33\times(-1) & 0-33\times 1+33\times(-1) \end{pmatrix}$$

donc $P^{-1}AP = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 24\times 11 & 0 & 0 \\ 24-12-12 & 16+3+3 & 0-3+3 \\ 0 & 0 & -33-33 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 12\times 2\times 11 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & -66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = D$

3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ *1 point*

On déduit de la question précédente que $PD = PP^{-1}AP = I_3AP = AP$
et donc $PDP^{-1} = APP^{-1} = AI_3 = A$

4. Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$ *1,5 points*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_3 = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$
donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $A^n = PD^nP^{-1}$
donc $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $A^n = PD^nP^{-1}$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n *2 points*

On va utiliser la relation démontrée ci-dessus : $A^n = PD^nP^{-1}$. Tout d'abord, par propriété sur les matrices diagonales,

$$D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \text{ donc } A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

soit $A^n = \dfrac{1}{22} \begin{pmatrix} 3 \times 12^n & 2 & 0 \\ 4 \times 12^n & -1 & (-3)^n \\ 4 \times 12^n & -1 & -(-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

$$A^n = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 3 \times 12^n \times 2 + 2 \times 8 + 0 & 3 \times 12^n \times 2 + 2 \times (-3) + 0 & 3 \times 12^n \times 2 + 2 \times (-3) + 0 \\ 4 \times 12^n \times 2 - 1 \times 8 + 0 & 4 \times 12^n \times 2 - 1 \times (-3) + (-3)^n \times 11 & 4 \times 12^n \times 2 - 1 \times (-3) + (-3)^n \times (-11) \\ 4 \times 12^n \times 2 - 1 \times 8 + 0 & 4 \times 12^n \times 2 - 1 \times (-3) - (-3)^n \times 11 & 4 \times 12^n \times 2 - 1 \times (-3) - (-3)^n \times (-11) \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \times 12^n + 16 & 6 \times 12^n - 6 & 6 \times 12^n - 6 \\ 8 \times 12^n - 8 & 8 \times 12^n + 3 + 11(-3)^n & 8 \times 12^n + 3 - 11(-3)^n \\ 8 \times 12^n - 8 & 8 \times 12^n + 3 - 11(-3)^n & 8 \times 12^n + 3 + 11(-3)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \times 12^n + 8 & 3 \times 12^n - 3 & 3 \times 12^n - 3 \\ 4 \times 12^n - 4 & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(-3)^n & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}(-3)^n \\ 4 \times 12^n - 4 & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}(-3)^n & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(-3)^n \end{pmatrix}$$

6. Exprimer B^n en fonction de A^n *0,5 point*

Par définition $B = \dfrac{1}{12}A$ donc $B^n = \left(\dfrac{1}{12}A\right)^n = \left(\dfrac{1}{12}\right)^n A^n = \dfrac{1}{12^n}A^n$

7. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n : *2,5 points*

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \times \frac{1}{12^n} \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

D'après les deux questions précédentes :

$$B^n = \frac{1}{12^n} \times \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \times 12^n + 8 & 3 \times 12^n - 3 & 3 \times 12^n - 3 \\ 4 \times 12^n - 4 & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(-3)^n & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}(-3)^n \\ 4 \times 12^n - 4 & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}(-3)^n & 4 \times 12^n + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(-3)^n \end{pmatrix}$$

$$B^n = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \frac{1}{12^n}(3 \times 12^n + 8) & \frac{1}{12^n}(3 \times 12^n - 3) & \frac{1}{12^n}(3 \times 12^n - 3) \\ \frac{1}{12^n}(4 \times 12^n - 4) & \frac{1}{12^n}\left(4 \times 12^n + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(-3)^n\right) & \frac{1}{12^n}\left(4 \times 12^n + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}(-3)^n\right) \\ \frac{1}{12^n}(4 \times 12^n - 4) & \frac{1}{12^n}\left(4 \times 12^n + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}(-3)^n\right) & \frac{1}{12^n}\left(4 \times 12^n + \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(-3)^n\right) \end{pmatrix}$$

$$B^n = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \frac{3 \times 12^n}{12^n} + \frac{8}{12^n} & \frac{3 \times 12^n}{12^n} - \frac{3}{12^n} & \frac{3 \times 12^n}{12^n} - \frac{3}{12^n} \\ \frac{4 \times 12^n}{12^n} - \frac{4}{12^n} & \frac{4 \times 12^n}{12^n} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} + \frac{11}{2} \times \frac{(-3)^n}{12^n} & \frac{4 \times 12^n}{12^n} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} - \frac{11}{2} \times \frac{(-3)^n}{12^n} \\ \frac{4 \times 12^n}{12^n} - \frac{4}{12^n} & \frac{4 \times 12^n}{12^n} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} + \frac{11}{2} \times \frac{(-3)^n}{12^n} & \frac{4 \times 12^n}{12^n} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} + \frac{11}{2} \times \frac{(-3)^n}{12^n} \end{pmatrix}$$

$$B^n = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 + \frac{8}{12^n} & 3 - \frac{3}{12^n} & 3 - \frac{3}{12^n} \\ 4 - \frac{4}{12^n} & 4 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} + \frac{11}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 4 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} - \frac{11}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ 4 - \frac{4}{12^n} & 4 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} - \frac{11}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 4 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12^n} + \frac{11}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \text{ car } \frac{(-3)^n}{12^n} = \left(-\frac{3}{12}\right)^n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$B^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{11}\left(3+\dfrac{8}{12^n}\right) & \dfrac{1}{11}\left(3-\dfrac{3}{12^n}\right) & \dfrac{1}{11}\left(3-\dfrac{3}{12^n}\right) \\ \dfrac{1}{11}\left(4-\dfrac{4}{12^n}\right) & \dfrac{1}{11}\left(4+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{12^n}+\dfrac{11}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right) & \dfrac{1}{11}\left(4+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{12^n}-\dfrac{11}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right) \\ \dfrac{1}{11}\left(4-\dfrac{4}{12^n}\right) & \dfrac{1}{11}\left(4+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{12^n}-\dfrac{11}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right) & \dfrac{1}{11}\left(4+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{12^n}+\dfrac{11}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{11}+\dfrac{8}{11\times 12^n} & \dfrac{3}{11}-\dfrac{3}{11\times 12^n} & \dfrac{3}{11}-\dfrac{3}{11\times 12^n} \\ \dfrac{4}{11}-\dfrac{4}{11\times 12^n} & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{11\times 2}\times\dfrac{1}{12^n}+\dfrac{11}{11\times 2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{11\times 2}\times\dfrac{1}{12^n}-\dfrac{11}{11\times 2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n \\ 4-\dfrac{4}{12^n} & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{11\times 2}\times\dfrac{1}{12^n}-\dfrac{11}{11\times 2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{11\times 2}\times\dfrac{1}{12^n}+\dfrac{11}{11\times 2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{11}+\dfrac{8}{11}\times\dfrac{1}{12^n} & \dfrac{3}{11}-\dfrac{3}{11}\times\dfrac{1}{12^n} & \dfrac{3}{11}-\dfrac{3}{11}\times\dfrac{1}{12^n} \\ \dfrac{4}{11}-\dfrac{4}{11}\times\dfrac{1}{12^n} & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{22}\times\dfrac{1}{12^n}+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{22}\times\dfrac{1}{12^n}-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n \\ \dfrac{4}{11}-\dfrac{4}{11}\times\dfrac{1}{12^n} & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{22}\times\dfrac{1}{12^n}-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n & \dfrac{4}{11}+\dfrac{3}{22}\times\dfrac{1}{12^n}+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Partie II - calculs de probabilités

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

- T : les jouets traditionnels
- M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film ... ;
- S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;

(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

(iii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la science optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$

Au départ, le volume des ventes de ce commerçant se compose d'une part $p_0 = \frac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T, d'une part $q_0 = \frac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \frac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S

On note :

- T_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie T pour le Noël de l'année n » ;
- M_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie M pour le Noël de l'année n » ;
- S_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie S pour le Noël de l'année n »

On désigne par p_n, q_n et r_n, les probabilités respectives des événements T_n, M_n, S_n

1. Justifier que (T_n, M_n, S_n) forme un système complet d'événements. *1 point*

L'ensemble (T_n, M_n, S_n) forme un système complet d'événements car T_n, M_n, S_n sont trois événements incompatibles deux à deux et leur réunion décrit bien l'univers des possibles (on ne distingue que trois catégories de jouets ici).

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$ *1,5 points*

Comme (T_n, M_n, S_n) forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :
$P(T_{n+1}) = P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(T_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(T_{n+1})$
et d'après les notations de l'énoncé $P(T_n) = p_n$ donc $P(T_{n+1}) = p_{n+1}, P(M_n) = q_n$ et $P(S_n) = r_n$ de plus $P_{T_n}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}$ (d'après l'hypothèse (i)), $P_{M_n}(T_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (d'après l'hypothèse (ii)) et $P_{S_n}(T_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (d'après l'hypothèse (iii)
d'où $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$

3. De même exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, q_{n+1}$ et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n *2 points*

En appliquant à nouveau la formule des probabilités totales, on trouve :
$P(M_{n+1}) = P(T_n)P_{T_n}(M_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(M_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(M_{n+1})$ et
$P(S_{n+1}) = P(T_n)P_{T_n}(S_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(S_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(S_{n+1})$
or $P_{T_n}(M_{n+1}) = P_{T_n}(S_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ (hypothèse (i)), $P_{M_n}(M_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{M_n}(S_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ (hypothèse (ii))
et $P_{S_n}(M_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{S_n}(M_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$(hypothèse (iii))
d'où $q_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{4}q_n + \dfrac{1}{2}r_n$ et $q_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{2}q_n + \dfrac{1}{4}r_n$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ (B étant la matrice définie dans la **partie I**). *1 point*

Par définition de B,

$$B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4p_n + 3q_n + 3r_n \\ 4p_n + 3q_n + 6r_n \\ 4p_n + 6q_n + 3r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{12}p_n + \frac{3}{12}q_n + \frac{3}{12}r_n \\ \frac{4}{12}p_n + \frac{3}{12}q_n + \frac{6}{12}r_n \\ \frac{4}{12}p_n + \frac{6}{12}q_n + \frac{3}{12}r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix}$$

d'après les relations trouvées aux questions **2.** et **3.** et car $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$ *1 point*

Par récurrence, évidemment ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(n)$: $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$

<u>Initiation</u> : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = B^0 \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$
ce qui est vrai, donc $Q(0)$ est vraie
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $Q(n)$ est vraie
d'après la question précédente $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$
donc $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = BB^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = B^{n+1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire que $Q(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

6. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n, q_n$, et r_n en fonction de n *2 points*

Il s'agit d'expliciter le résultat de la question précédente grâce à l'expression de la matrice B^n trouvée à la question **A.7** et sachant que d'après les hypothèses de l'énoncé, $p_0 = \dfrac{45}{100}, q_0 = \dfrac{25}{100}$ et $r_0 = \dfrac{30}{100}$, on trouve alors :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \times \frac{1}{12^n} \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times \frac{1}{12^n} & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{4}{11} + \frac{3}{22} \times \frac{1}{12^n} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{45}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{30}{100} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\\r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{45}{100}\left(\frac{3}{11}+\frac{8}{11}\times\frac{1}{12^n}\right)+\frac{25}{100}\left(\frac{3}{11}-\frac{3}{11}\times\frac{1}{12^n}\right)+\frac{30}{100}\left(\frac{3}{11}-\frac{3}{11}\times\frac{1}{12^n}\right)\\ \frac{45}{100}\left(\frac{4}{11}-\frac{4}{11}\times\frac{1}{12^n}\right)+\frac{25}{100}\left(\frac{4}{11}+\frac{3}{22}\times\frac{1}{12^n}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)+\frac{30}{100}\left(\frac{4}{11}+\frac{3}{22}\times\frac{1}{12^n}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)\\ \frac{45}{100}\left(\frac{4}{11}-\frac{4}{11}\times\frac{1}{12^n}\right)+\frac{25}{100}\left(\frac{4}{11}+\frac{3}{22}\times\frac{1}{12^n}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)+\frac{30}{100}\left(\frac{4}{11}+\frac{3}{22}\times\frac{1}{12^n}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)\end{pmatrix}$$

$$\text{donc}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\\r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{45}{100}+\frac{25}{100}+\frac{30}{100}\right)\frac{3}{11}+\frac{45\times8-25\times3-30\times3}{100\times11\times12^n}\\ \left(\frac{45}{100}+\frac{25}{100}+\frac{30}{100}\right)\frac{4}{11}+\frac{(-45)\times8+3\times25+3\times30}{100\times22\times12^n}+\left(\frac{25}{100}-\frac{30}{100}\right)\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\\ \left(\frac{45}{100}+\frac{25}{100}+\frac{30}{100}\right)\frac{4}{11}+\frac{(-45)\times8+3\times25+3\times30}{100\times22\times12^n}+\left(-\frac{25}{100}+\frac{30}{100}\right)\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}p_n\\q_n\\r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{11}+\frac{195}{100\times11\times12^n}\\ \frac{4}{11}+\frac{195}{100\times22\times12^n}-\frac{5}{100}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\\ \frac{4}{11}+\frac{195}{100\times22\times12^n}+\frac{5}{100}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{11}+\frac{39}{220\times12^n}\\ \frac{4}{11}+\frac{39}{440\times12^n}-\frac{1}{40}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\\ \frac{4}{11}+\frac{39}{440\times12^n}+\frac{1}{40}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}\text{ car }195=39\times5$$

donc $p_n=\dfrac{3}{11}+\dfrac{39}{220\times12^n}$, $q_n=\dfrac{4}{11}+\dfrac{39}{440\times12^n}-\dfrac{1}{40}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $q_n=\dfrac{4}{11}+\dfrac{39}{440\times12^n}+\dfrac{1}{40}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$

7. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente ? *1,5 points*

Comme $12^n\to+\infty$ et $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\to0$ (formes géométriques : q^n avec respectivement $|q|>1$ et $|q|<1$)

alors par opérations $p_n\to\dfrac{3}{11}$, $q_n\to\dfrac{4}{11}$ et $r_n\to\dfrac{3}{11}$ donc à terme, les jouets traditionnels représentent $\dfrac{3}{11}$ des ventes, les jouets liés à la mode $\dfrac{4}{11}$ de même que les jouets scientifiques.

8. Avec Python, que font les programmes suivants ?

a. Premier programme : *1,5 points*

```python
import numpy.random as rd
def tirage_jouet() :
  a=rd.randint(1,101)
  if a<=45:
    return 1
  elif a>70:
    return 3
  else:
    return 2
```

Ce premier programme modélise le tirage aléatoire d'un jouet parmi les trois catégories à l'instant 0. Le résultat 1 représente un jouet traditionnel qui aura une probabilité d'être tiré de 0,45 puisque la fonction `randint` renverra ici un nombre aléatoire entre 1 et 100 de manière équiprobable. De même, le résultat 2 représente un jouet lié à la mode qui aura une probabilité d'être tiré de 0,25 et le résultat 3 représente un jouet scientifique qui aura une probabilité d'être tiré de 0,3

b. Deuxième programme : *2 points*

```python
x=tirage_jouet()
n=1
while x<3:
  if x==1:
    x=rd.randint(1,4)
  else :
    r=rd.randint(1,5)
    if r==1:
      x=1
    elif r==2:
      x=2
    else :
      x=3
  n=n+1
print(n)
```

Ce programme simule une succession de tirages parmi les jouets avec les probabilités de l'énoncé, et renvoie le numéro du tirage pour lequel un jouet scientifique (représenté par le 3) a été obtenu pour la première fois.
De manière chronologique, le programme commence par un premier tirage aléatoire grâce à la fonction définie précédemment et il initialise à 1 le compteur de tirage (qui correspond à la variable `n`).
Ensuite la boucle `while` permet de modéliser l'expérience « jusqu'au » premier tirage d'un jouet scientifique. Dans la boucle, c'est-à-dire tant que la condition n'est pas réalisée, si le tirage valait 1 (ce qui correspond à un jouet traditionnel) alors le rang (l'année) suivant(e) un jouet peut-être tiré dans chacune des trois catégories avec équiprobabilité d'où l'utilisation de `rd.randint(1,4)` qui donner 1, 2 ou 3 de manière équiprobable.
Si le tirage valait 2 (ce qui correspond à un jouet lié à la mode) alors le rang (l'année) suivant(e) un jouet peut-être tiré dans chacune des trois catégories avec des probabilités différentes, d'où l'utilisation de `rd.randint(1,4)` car les résultats 1 et 2 ne doivent sortir qu'une fois sur 4 dans ce cas (et le résultat 3 une fois sur 2).