ECG 1 - maths appli. **Introduction aux séries numériques** 5 mars 2025

Groupe 1 - autour de la définition des séries

En s'inspirant du tableau ci-dessous et du cas concret ci-dessous, proposer et illustrer une définition des séries numériques et de la somme partielle.

Suite	Sommes partielles
u_0	u_0
u_1	u_0+u_1
u_2	$u_0+u_1+u_2$
u_3	$u_0+u_1+u_2+u_3$
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots$
u_n	$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

Une situation concrète :
une suite et la somme de ses termes

Monsieur Pénible veut faire creuser un puits dans son jardin. L'entreprise qu'il a contactée lui propose le devis suivant : Le premier mètre coûte 120€ et chaque mètre supplémentaire coûte 50€ de plus que le mètre précédent. On note u_n le coût du forage du $n^{\text{ième}}$ mètre. Voici des questions possibles :

1. Combien va lui coûter un puits de 6 mètres ?
2. Il dispose d'un budget de 5000€. Quelle sera la profondeur maximale de son puits ?
3. Peut-il faire creuser un puits infini (sachant que son budget est fini) ?

Groupe 2 - autour de la convergence

Démontrer et illustrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}$

Travaux pratiques pour une illustration concrète :

Prendre une feuille A4. On considère qu'elle représente l'unité (« elle fait un »). Puis réaliser les étapes suivantes :

1. Couper la feuille en deux parties égales, sur une des deux parties, noter u_1 ;
2. Prendre la partie vierge, la couper en deux parties égales puis sur un des deux nouveaux morcaux, noter u_2 ;
3. ... répéter l'opération jusqu'à u_5 (ou plus si affinité).
4. Reconstituer le puzzle.

Qu'est-ce qui majore le puzzle ? Vers quoi peut tendre le puzzle ?

ECG 1 - maths appli. **Introduction aux séries numériques** 5 mars 2025

Groupe 1 - autour de la définition des séries

En s'inspirant du tableau ci-dessous et du cas concret ci-dessous, proposer et illustrer une définition des séries numériques et de la somme partielle.

Suite	Sommes partielles
u_0	u_0
u_1	u_0+u_1
u_2	$u_0+u_1+u_2$
u_3	$u_0+u_1+u_2+u_3$
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots$
u_n	$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

Une situation concrète :
une suite et la somme de ses termes

Monsieur Pénible veut faire creuser un puits dans son jardin. L'entreprise qu'il a contactée lui propose le devis suivant : Le premier mètre coûte 120€ et chaque mètre supplémentaire coûte 50€ de plus que le mètre précédent. On note u_n le coût du forage du $n^{\text{ième}}$ mètre. Voici des questions possibles :

1. Combien va lui coûter un puits de 6 mètres ?
2. Il dispose d'un budget de 5000€. Quelle sera la profondeur maximale de son puits ?
3. Peut-il faire creuser un puits infini (sachant que son budget est fini) ?

Groupe 2 - autour de la convergence

Démontrer et illustrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}$

Travaux pratiques pour une illustration concrète :

Prendre une feuille A4. On considère qu'elle représente l'unité (« elle fait un »). Puis réaliser les étapes suivantes :

1. Couper la feuille en deux parties égales, sur une des deux parties, noter u_1 ;
2. Prendre la partie vierge, la couper en deux parties égales puis sur un des deux nouveaux morcaux, noter u_2 ;
3. ... répéter l'opération jusqu'à u_5 (ou plus si affinité).
4. Reconstituer le puzzle.

Qu'est-ce qui majore le puzzle ? Vers quoi peut tendre le puzzle ?

Groupe 3 - autour de la croissance monotone

Démontrer et illustrer la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

On pourra utiliser le tableau ci-contre pour illustrer. Ce tableau repose sur l'inégalité suivante :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{et sur} \quad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

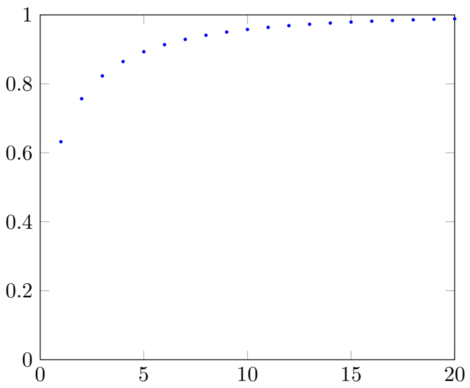
Rang	Sommes partielles		Majorant au rang n		Majorant global
1	$\frac{1}{1^2}$	$\leqslant$		$\leqslant$	2
2	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$	$\leqslant$	$1 + 1 - \frac{1}{2}$	$\leqslant$	
3	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$	$\leqslant$		$\leqslant$	
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots$				
n	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$	$\leqslant$		$\leqslant$	

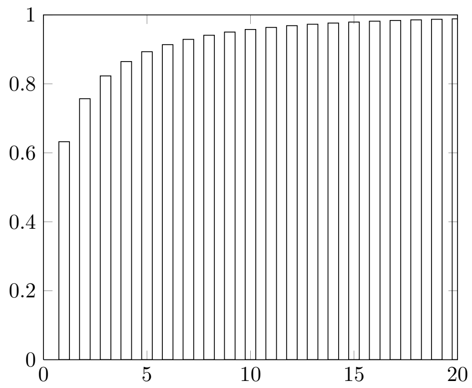
Groupe 4 - autour d'une condition nécessaire de convergence

L'objectif ici est de montrer que :
si une série $\sum_n u_n$ converge alors nécessairement $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Nous ne l'avions pas précisé, mais cette condition se retrouve pour les suites : si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Autrement dit si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

On pourra utiliser les graphiques suivants pour illustrer. Et on pourra aussi utiliser une suite pour montrer que la réciproque est fausse.





Groupe 3 - autour de la croissance monotone

Démontrer et illustrer la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

On pourra utiliser le tableau ci-contre pour illustrer. Ce tableau repose sur l'inégalité suivante :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{et sur} \quad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Rang	Sommes partielles		Majorant au rang n		Majorant global
1	$\frac{1}{1^2}$	$\leqslant$		$\leqslant$	2
2	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$	$\leqslant$	$1 + 1 - \frac{1}{2}$	$\leqslant$	
3	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$	$\leqslant$		$\leqslant$	
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots$				
n	$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$	$\leqslant$		$\leqslant$	

Groupe 4 - autour d'une condition nécessaire de convergence

L'objectif ici est de montrer que :
si une série $\sum_n u_n$ converge alors nécessairement $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Nous ne l'avions pas précisé, mais cette condition se retrouve pour les suites : si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Autrement dit si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

On pourra utiliser les graphiques suivants pour illustrer. Et on pourra aussi utiliser une suite pour montrer que la réciproque est fausse.