Notion	**Exercices a minima**	**Mais aussi**
Divergence grossière	1	
Séries télescopique	2, 3, 5	4
Séries de référence	9	8
Convergence absolue	7	
Séries à termes positifs	6, 10	

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-5}{2n^2+1}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2-2}{n^3}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

Exercice 2

Pour n entier tel que $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$, peut-on conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$?

2. Transformer l'expression de u_n pour $n\geqslant 2$,

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$ est convergente et calculer la somme de cette série.
Indication : un peu comme dans l'**exercice 3**.

Exercice 3

Pour n entier tel que $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$, peut-on conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$?

2. Pour $n\geqslant 2$, mettre $1-\dfrac{1}{n}$ sous forme d'une fraction, puis transformer l'expression de u_n

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$ est divergente et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}u_k$
Indication : on devra reconnaitre une série très particulière.

Exercice 4

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :
$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n, en utilisant des télescopages.

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 5

Soit u la suite définie par $u_0\in]0,1[$, et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n-u_n^2$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\in]0,1[$

2. Etudier la monotonie de la suite u

3. En déduire que u converge, vers 0

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n^2$ est convergente.

5. Déterminer la somme de cette série.

Exercice 6

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_n \leqslant u_n$

*Les résultats démontrés aux **1.a.** et **2.a.** restent valables pour des séries qui ne commencent qu'au rang 1, ou 2, ou 3...etc.*

1. **a.** On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est elle aussi convergente.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$ est convergente.

2. **a.** On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, vers $+\infty$

b. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

c. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n-1+(-1)^n e^{-n}}$ est divergente.

Séries usuelles

Exercice 7

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, avec :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ **2.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n e^{-n}}{n^2}$

Exercice 8

Soit q un nombre réel tel que $|q| < 1$

1. Soit p un entier, avec $p \geqslant 2$

a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant p} q^n$ est convergente.

b. Calculer la somme de cette série.

2. **a.** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} nq^n$ est convergente.

b. Calculer la somme de cette série.

3. **a.** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2q^n$ est convergente.

b. Calculer la somme de cette série.

Exercice 9

Justifier que la série suivante est convergente, et calculer sa somme.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$

2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n n!}$

3. $\sum_{n\geqslant 0} n(-1)^n e^{-n}$

4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{2^n}$

5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n^2+3n+5}{2^n}$

6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^{2n+1}}$

7. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+(-1)^n}{3^n}$

8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$

9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(-1)^n}{4^n}$

10. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$

Exercice 10

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, avec, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{e^n + e^{-n}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

1. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant e^{-n}$

3. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

a. Déduire de **2.** que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

b. Retrouver que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, on notera S sa somme.

c. Montrer que $S \leqslant \frac{e}{e-1}$