ECG 1 - maths appli. **Devoir en temps libre n°8** Pour le 10 mars 2025

Corrigé *Total sur 23,5 points*

Exercice 1 - Continuité *2 points par question - total sur 4 points*

Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

1. f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

f est continue sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$ en tant que somme et quotient de fonctions continues, le seul problème de continuité possible se situe en 0

Comme la forme de la fonction le laisse présager (différence de racines), on va utiliser la technique du conjugué :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}&=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\end{aligned}$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\dfrac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$ (par continuité)

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1=f(0)$ donc f est continue en 0, donc f est continue.

2. g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 2 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

On essaie d'abord de s'affranchir de la valeur absolue : <u>si $x<1$</u> alors $x-1<0$ et donc $|x-1|=1-x$

et donc dans ce cas, $g(x)=\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ mais il s'agit toujours d'une forme indéterminée en 1, que l'on transforme grâce à une identité remarquable : $1-x=1^2-\sqrt{x}^2=(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$

et donc (toujours dans le cas $x<1$), on trouve $g(x)=\dfrac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}$ et de fait $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}1+\sqrt{x}=2=f(1)$ donc g est continue à gauche en 1

de même <u>si $x>1$</u> alors $x-1>0$ et donc $|x-1|=x-1$ puis $g(x)=-(1+\sqrt{x})$

alors $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=-2\neq f(1)(\neq \lim\limits_{x\to 1^-}g(x))$ et de fait g n'est pas continue en 1, donc g n'est pas continue.

<u>Remarque</u> : la non continuité à droite suffit ici. On pouvait préciser que par ailleurs g est continue sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ en tant que somme, composition et quotient de fonctions continues (le seul problème de continuité possible se situant en 1, mais cela suffit à rendre la fonction non continue ici).

Exercice 2 *19,5 points*

Partie A - étude d'une fonction auxiliaire

11 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ *1,5 points*

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ (limites usuelles) donc par addition $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

   en $+\infty$, on factorise par le terme dominant pour lever l'indétermination : $g(x) = e^x\left(2 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{2}{e^x}\right)$

   or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (limite usuelle) donc par opération $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc par addition $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{2}{e^x} = 2$ et enfin par multiplication $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(2 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{2}{e^x}\right) = +\infty$

2. Dresser le tableau de variations de g *1,5 points*

   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^x - 1$

   donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\ln(2)$

   (car ln est croissante)
   de même $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\ln(2)$
   de plus $g(-\ln(2)) = 2e^{-\ln(2)} - (-\ln(2)) - 2$
   $= 2\times\dfrac{1}{2} + \ln(2) - 2 = \ln(2) - 1$
   on peut donc dresser le tableau de variations

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2) - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ possède deux solutions, notées α et β, avec $\alpha < \beta$ *1,5 points*

   g est strictement décroissante sur $]-\infty, -\ln(2)]$ et strictement croissante sur $[-\ln(2), +\infty[$, de plus g est continue (somme de fonctions usuelles), donc d'après le théorème de la bijection,

   g réalise une bijection de $]-\infty, -\ln(2)]$ sur $\left[g(-\ln(2)), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right[$ i.e. sur $[\ln(2) - 1, +\infty[$

   et g réalise une bijection de $[-\ln(2), +\infty[$ sur $\left[g(-\ln(2)), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$ i.e. sur $[\ln(2) - 1, +\infty[$

   de plus $\ln(2) < 1$ (en effet $2 < e$ donc par stricte croissance de ln, $\ln(2) < \ln(e) = 1$)
   donc $\ln(2) - 1 < 0$ et de fait $0 \in [\ln(2) - 1, +\infty[$, donc 0 admet un unique antécédent sur $]-\infty, -\ln(2)]$ (que l'on notera α) et un unique antécédent sur $[-\ln(2), +\infty[$ (on le notera β)
   enfin $g(-\ln(2)) < 0 \Rightarrow \alpha < -\ln(2)$ et $\beta > -\ln(2)$ et en particulier $\alpha < \beta$

4. Vérifier que $-2 < \alpha < -1$ et que $\beta = 0$ *2 points*

   $g(-2) = 2e^{-2} - (-2) - 2 = 2e^{-2}$ et $g(-1) = 2e^{-1} - (-1) - 2 = 2e^{-1} - 1$

   donc $g(-2) > 0$ et $g(-1) < 0$ car $2e^{-1} = \dfrac{2}{e} < 1$ (car $e > 2$)

   donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (g est toujours continue), l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $[-2, -1]$ et même sur $]-2, -1[$ car $g(-2) \neq 0$ et $g(-1) \neq 0$
   or α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\infty, -\ln(2)]$ et $]-2, -1[\subset]-\infty, -\ln(2)]$ (car $-1 < -\ln(2)$) donc la solution trouvée sur $]-2, -1[$ n'est autre que α

   par ailleurs $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 0$ donc $\beta = 0$ puisque β est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[-\ln(2), +\infty[$

5. A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$ *1 point*

   g étant strictement décroissante sur $]-\infty, -\ln(2)]$ et strictement croissante sur $[-\ln(2), +\infty[$, et comme $g(\alpha) = 0$ (avec $\alpha \in]-2, -1[$) et $g(0) = 0$, on peut établir le tableau de signes :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

6. Avec Python,

a. définir la fonction g, puis la représenter graphiquement sur un intervalle de votre choix ; *1,5 points*

On choisit ici de représenter g sur $[-5,5]$, ce qui permet notamment de visualiser α et β

```
import numpy as np
def g(x):
  return 2*np.exp(x)-x-2
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(-5,5,100)
y=g(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

b. écrire un programme qui détermine une valeur approchée de α avec une précision de 10^{-4} *2 points*

on utilise la méthode par dichotomie sur l'intervalle $[-2,-1]$ (avec g définie au préalable) :

```
a=-2
b=-1
while b-a>10**(-4) :
  c=(a+b)/2
  if g(c)>0 :
    a=c
  else :
    b=c
print(c, "valeur approchée de alpha à 0,0001 près")
```

on trouve $\alpha \simeq -1,593$

Partie B - étude de la fonction principale

8,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat. *1,5 points*

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (limite usuelle), $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ (composition)

et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc par addition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

graphiquement, cela signifie que la courbe représentative se rapproche indéfiniment de l'axe des abscisses quand x tend vers $-\infty$ (on dit aussi que l'axe des abscisses est une asymptote, horizontale ici, de f quand x tend vers $-\infty$).

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ *1 point*

On pressent que le e^{2x} va prédominer dans l'expression, on peut donc factoriser par ce terme :

$$f(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{(x+1)e^x}{e^{2x}}\right) = e^{2x}\left(1 - \frac{x+1}{e^x}\right) = e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ (inverse d'une limite infinie) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{x+1}{e^x} = 1$ et par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)e^x$ et en déduire le tableau de variations de f *2 points*

pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $u(x) = x+1$ et $v(x) = e^x$, on trouve $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$

et donc $f'(x) = 2e^{2x} - (1 \times e^x + (x+1) \times e^x)$

$f'(x) = 2e^{2x} - (1+(x+1))e^x = 2e^x e^x - (x+2)e^x$

$= [2e^x - (x+2)]\, e^x = g(x)e^x$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ étudié plus haut, on peut donc établir les variations de f (avec $f(0) = 0$)

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

4. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ (avec α défini plus haut). *1,5 points*

par définition de f, $f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha$ et d'après la **partie A**, $g(\alpha) = 0$, i.e. $2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$

donc $e^\alpha = \dfrac{\alpha+2}{2}$ et donc $f(\alpha) = \left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\dfrac{\alpha+2}{2} = \dfrac{(\alpha+2)^2 - 2(\alpha+2)(\alpha+1)}{4}$

donc $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha+2)(\alpha+2-2\alpha-2)}{4}$ et donc $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4}$

5. Justifier que $0 < f(\alpha) < \dfrac{1}{4}$ (on pourra étudier $x \mapsto x^2 + 2x$) *1,5 points*

Comme suggéré, on étudie h définie par $h(x) = x^2 + 2x$ et dont la dérivée vaut $h'(x) = 2x + 2$
soit x tel que $-2 < x < -1$, alors $2x < -2$ et $2x + 2 < 0$
donc h est strictement décroissante sur $[-2, -1]$
or $-2 < \alpha < -1$ donc $h(-2) > h(\alpha) > h(-1)$ i.e. $0 > \alpha^2 + 2\alpha > -1$
donc $0 < -\alpha^2 - 2\alpha < 1$ donc $0 < \dfrac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} < \dfrac{1}{4}$ i.e. $0 < f(\alpha) < \dfrac{1}{4}$

6. Donner l'allure de la courbe représentative de f *1 point*

Le tableau de variations donne presque l'allure de f, il faut représenter la croissance de f de 0 à $f(\alpha) < \dfrac{1}{4}$ sur l'intervalle $]-\infty, \alpha]$, puis sa décroissance pour atteindre 0 en 0, et enfin sa croissance pour tendre vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Sans calculatrice, il est difficile de calculer avec une précision suffisante des points de f donc on se contente de cela.